



referência para Cálculo de Concreto Armado

São Paulo - 2000

ÍNDICE

Conceitos Básicos	1
Cargas Características	1
Esforços Solicitantes e Reações	2
Regras de Pré-dimensionamento de Peças	3
Flexão Simples	4
Diagramas	4
Estado Limite Último convencional na Flexão	5
Domínio de Deformação	6
Vigas de Seção Retangular com Armadura Simples	7
Viga de Seção "T" com Armadura Simples	9
Viga de Seção Retangular com Armadura Dupla	10
Lajes Retangulares Maciças	12
Lajes Armadas em uma Direção	13
Esforços Solicitantes	13
Dimensionamento à Flexão	14
Altura Útil	15
Cálculo das Armaduras	15
Escolha das Barras	16
Lajes Armadas em Duas Direções	17
Esforços nas Lajes Isoladas	17
Método simplificado aplicável a pisos usuais de edifícios	18
Altura Útil	19
Armaduras Mínimas	20
Escolha das Barras	21
Lajes Nervuradas	22
Pilares	23
Tipos de Pilares	25
Situação de Cálculo	26
Dimensionamento da Seção Retangular (armadura simétrica)	27
Dimensões mínimas	28
Disposições Construtivas, Bitolas e Espaçamentos	29
Travamentos Adicionais na Seção Transversal	29

Compilação e Projeto Gráfico:

Karin Regina de Castro Marins, Roberto Issamu Takahashi e Tiago Gimenez Ribeiro

[Baseado no resumo de Marcos Silveira]

a partir das Apostilas do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica

CONCEITOS BÁSICOS

Ao se calcular uma estrutura de concreto precisamos, primeiramente, determinar os seguintes itens:

Cargas Características;
Reações;
Esforços Solicitantes;

Cargas Características

Dividem-se em cargas permanentes e variáveis (ou acidentais).

- Cargas Permanentes: são cargas constituídas pelo peso próprio da estrutura e pelos pesos de todos os elementos fixos e instalações permanentes. Abaixo estão alguns exemplos de cargas de alguns dos materiais mais conhecidos, fornecidas por peso específico:

Concreto simples	= 24 KN/m ³
Concreto armado	= 25 KN/m ³
Argamassa	= 19 KN/m ³
Alvenaria de tijolo maciço	= 16 KN/m ³
Alvenaria de tijolo furado	= 10 KN/m ³
Alvenaria de blocos de concreto	= 13 KN/m ³

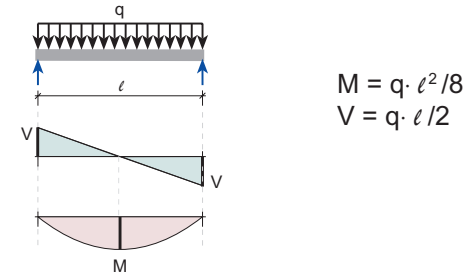
- Cargas Variáveis ou Acidentais (NBR 6120): são as cargas que podem atuar sobre as estruturas de edificações em função de seu uso. Abaixo estão alguns exemplos de cargas acidentais verticais atuando nos pisos das edificações, devidas a pessoas, móveis, utensílios, etc., e são supostas uniformemente distribuídas:

Salas, quartos, cozinhas e wc's	= 1.5 KN/m ²
Escadas, corredores e terraços	= 3.0 KN/m ²
Restaurantes e salas de aula	= 3.0 KN/m ²
Auditórios	= 3.0 KN/m ²
Bibliotecas (estantes)	= 6.0 KN/m ²
Cinemas (platéia)	= 4.0 KN/m ²

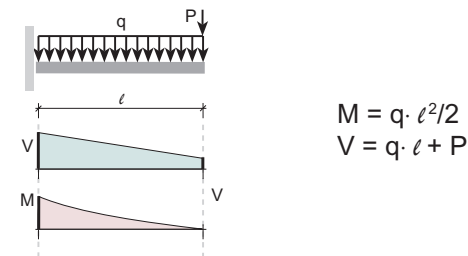
Esforços Solicitantes e Reações

Esforços solicitantes e reações foram objeto de matérias básicas desta seqüência de disciplinas. Na figura abaixo, a título de recordação, estão representados os esforços solicitantes e reações de algumas situações em vigas:

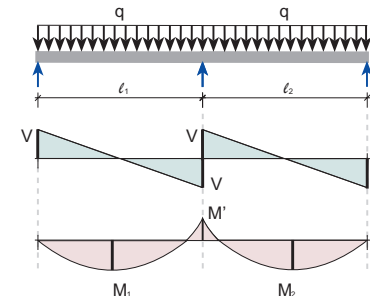
Esforços Máximos na Viga Biapoiada



Esforços Máximos na Viga em Balanço



Esforços Máximos na Viga com três apoios



Regras de pré-dimensionamento de peças

Ao se pré-dimensionar uma peça de concreto deve-se seguir os seguintes passos lógicos:

- Determinação das ações;
- Determinação das resistências;
- Verificação da segurança.

As ações são as solicitações à peça, as resistências levam em conta a seção transversal e as características mecânicas dos materiais, e a segurança deve ser garantida com um dimensionamento que supere os esforços que incidam sobre a peça com uma certa “folga”.

Algumas hipóteses básicas devem também ser adotadas:

- Manutenção da seção plana: as seções transversais da peça, quando fletidas, não perdem a configuração plana;
- Aderência perfeita entre o concreto e armadura: não há escorregamento entre os materiais;
- A tensão do concreto é nula na região da seção transversal sujeita à deformação de alongamento.

FLEXÃO SIMPLES

Na flexão simples a ação pode ser admitida como sendo representada apenas pelo Momento de Projeto = M_d ; são adotadas como resistências aquelas oferecidas pelo concreto (f_{ck}), pelo aço (f_{yk}) e pela seção transversal (M_{ud}); e a segurança adequada é quando é verificada a condição: $M_d \leq M_{ud}$. Por razão de economia, faz-se $M_d = M_{ud}$.

O concreto mais utilizado tem como característica um f_{ck} entre 20 e 28 MPa (KN/m^2), sendo 24 MPa o mais usual, enquanto que o aço mais utilizado, o CA50A, tem como f_{yk} um valor de 50 KN/m^2 .

Além da resistência, existem ainda outras características inerentes ao concreto e ao aço, que serão utilizadas para efeito de cálculo, a saber:

Concreto	Aço
$f_{ck} = 24 \text{ MPa}$	$f_{yk} = 50 \text{ KN/cm}^2$
$\gamma_c = 1,4$	$\gamma_s = 1,15$
$E_c = 30.000 \text{ MPa}$	$E_s = 210.000 \text{ MPa}$

onde f_{ck} é, como dissemos, o valor característico da resistência do concreto, f_{yk} é o valor característico de resistência da armadura correspondente ao patamar de escoamento, γ_c é o coeficiente de ponderação de resistência do concreto (coeficiente de segurança), γ_s é o coeficiente de ponderação de resistência de armadura (coeficiente de segurança), E_c é o módulo de elasticidade do concreto e E_s é o módulo elasticidade do aço.

Diagrama Tensão-Deformação (de Cálculo) da Armadura:

- Aço de dureza natural (com patamar de escoamento)

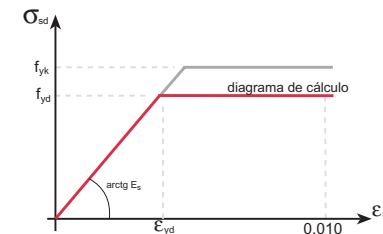


Diagrama Tensão-Deformação (de Cálculo) do Concreto:
- Diagrama parábola-retângulo

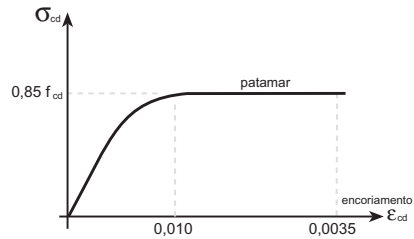
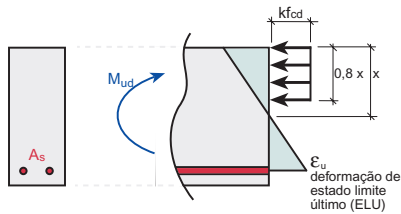


Diagrama retangular simplificado

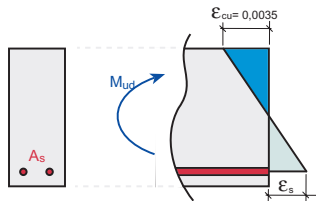


x = altura da zona comprimida, medida a partir de borda comprimida
 $k = 0,86$, quando a altura de zona comprimida não diminui em direção à borda comprimida (seção retangular)

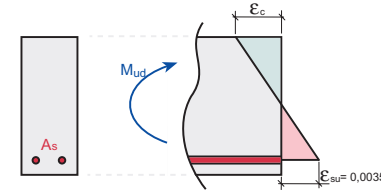
Estado limite último convencional na flexão

É atingido quando ocorro uma dos seguintes situações

-A deformação de encurtamento no concreto (ϵ_{cu}) atinge 0,0036; denomina-se estado limite último (ELU) por esmagamento do concreto:

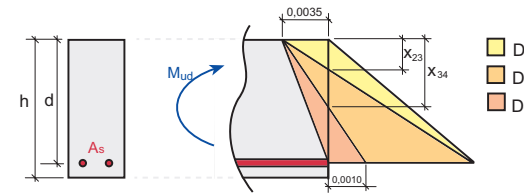


-A deformação de alongamento na armadura mais tracionada (ϵ_{su}) atinge 0,010; denomina-se estado limite último (ELU) por alongamento plástico excessivo de armadura:



Domínios de Deformação:

Conforme foi visto no ítem anterior, o estado limite último convencional ocorre quando o diagrama de deformação passa por um dos dois pontos, A ou B, na figura seguinte:



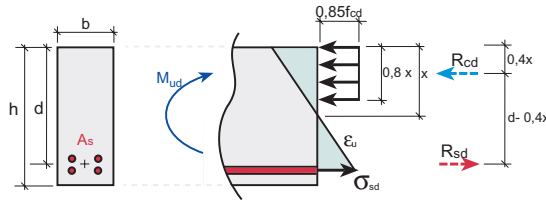
d = altura útil da seção = distância do CG da armadura à borda comprimida
 x = altura de zona comprimida

- Diagrama D2: o concreto é pouco solicitado e a armadura está em escoamento: a ruptura é do tipo “dútil” (com aviso).
- Diagrama D3: o concreto está adequadamente solicitado e a armadura em escoamento: a ruptura também é dútil. As seções acima são ditas subarmadas ou normalmente armadas.
- Diagrama D4: o concreto é muito solicitado e a armadura pouco solicitada. A ruptura é do tipo “frágil” (sem aviso). A seção é dita superarmada e é uma solução antieconômica pois a armadura não é explorada ao máximo.

VIGA DE SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA SIMPLES

Tem as seguintes características:

- A zona comprimida da seção sujeita à flexão tem forma retangular;
- A armadura é constituída por barras agrupadas junto à borda tracionada e pode ser imaginada concentrada no seu centro de gravidade.



Resultante dos tensões

$$\text{No Concreto: } R_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0,8 \cdot x = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd}$$

$$\text{Na Armadura: } R_{sd} = A_s \cdot \sigma_{sd}$$

Equações de equilíbrio

$$\text{De Força: } R_{cd} = R_{sd} \quad \text{ou} \quad 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} = A_s \cdot \sigma_{sd} \quad 1$$

$$\text{De Momento: } M_{ud} = R_{cd} \cdot (d - 0,4x) \quad \text{ou} \\ M_{ud} = R_{sd} \cdot (d - 0,4x)$$

substituindo o valor das resultantes de tensão vem:

$$M_{ud} = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4x) \quad \text{ou} \quad 2 \\ M_{ud} = A_s \cdot \sigma_{sd} \cdot (d - 0,4x) \quad 3$$

Nos casos de dimensionamento, tem-se b , f_{ck} e faz-se $M_{ud} = M_d$, (momento fletor solicitante em valor de cálculo). Normalmente, pode-se adotar $d = 0,9 \cdot h$. Desta forma, a equação 2 nos fornece o valor de x :

$$x = 1,25 \cdot d \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425 \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right]$$

Com o valor de x , tem-se o domínio de deformação correspondente, podendo ocorrer as seguintes situações:

-Domínio 2, onde

$$x \leq x_{23} = 0,269 \cdot d; \text{ e } \sigma_{sd} = f_{yd}$$

-Domínio 3, onde

$$x_{23} \leq x \leq x_{34} = 0,0035d / (0,0035 + \epsilon_{yd}); \text{ e } \sigma_{sd} = f_{yd}$$

-Domínio 4, se $x \geq x_{34}$, neste caso convém alterar a seção para se evitar a peça superarmada, aumentando-se h ou adotando-se armadura dupla.

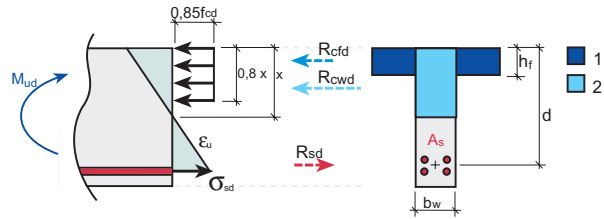
Para a situação adequada de peça subarmada tem-se

$$\sigma_{sd} = f_{yd}. \text{ Assim, a equação 3 nos fornece:}$$

$$A_s = \frac{M_d}{\sigma_{sd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)} = \frac{M_d}{f_{yd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)}$$

VIGA DE SEÇÃO “T” COM ARMADURA SIMPLES

A análise de uma seção “T” pode ser feita como se indica a seguir:



O problema pode ser equacionado subdividindo a zona comprimida em retângulos (1 e 2). As resultantes de tensão sobre as partes 1 e 2 valem:

$$R_{cfd} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (b_f - b_w) \cdot h_f \quad \text{e} \quad R_{cwd} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot (0,8 \cdot x)$$

A equação de equilíbrio de momento fornece:

$$M_{ud} = M_d = M_{cfd} + M_{cwd} = R_{cfd} \cdot (d - h_f/2) + M_{cwd}$$

Este momento deve ser resistido pela parte 2 que é uma seção retangular b_w por d , portanto:

$$x = 1,25 \cdot d \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{M_{cwd}}{0,425 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right]$$

A equação de equilíbrio de força permite escrever:

$$\begin{aligned} R_{cd} &= R_{cfd} + R_{cwd} \\ A_s \cdot f_{yd} &= R_{cfd} + R_{cwd} \end{aligned}$$

Portanto

$$A_s = \frac{R_{cfd} + R_{cwd}}{f_{yd}}$$

VIGA DE REÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA DUPLA

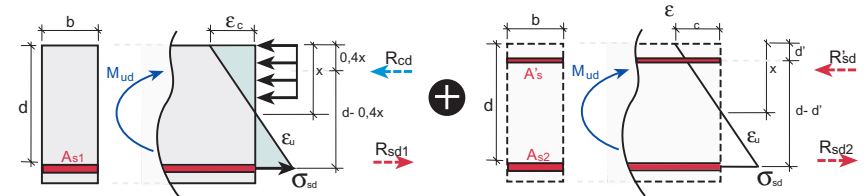
Quando se tem, além da armadura de tração A_s , outra A'_s posicionada junto à borda comprimida, temos uma seção com armadura dupla. Isto é feito para se conseguir uma seção subarmada sem alterar as dimensões de seção transversal. A armadura comprimida introduz uma parcela adicional na resultante de compressão, permitindo assim, aumentar a resistência da seção. Vejamos as equações de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \text{De Força:} \quad R_{sd} &= R_{cd} + R'_{sd} \quad A \\ A_s \cdot \sigma_{sd} &= 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De Momento:} \quad M_d &= R_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) + R'_{sd} \cdot (d - d') \quad B \\ M_d &= 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) + A'_s \cdot \sigma'_{cd} \cdot (d - d') \end{aligned}$$

Temos assim duas equações (A e B) e três incógnitas: x , A_s e A'_s (pois as tensões na armadura depende de x).

Costuma-se adotar um valor de x , por exemplo $x = d/2$. Dessa forma podem ser determinadas as armaduras A_s e A'_s como se indica a seguir. As equações A e B sugerem a decomposição mostrada na figura seguinte:



Conforme se indica na figura acima, pode ser determinado a primeira parcela do momento resistente, designada por M_{wd} :

$$M_{wd} = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) \quad \text{e} \quad R_{sd1} = M_{wd} / (d - 0,4x)$$

Como $\sigma_{sd} = f_{yd}$ (peça subarmado), tem-se:

$$A_s = R_{sd1} / f_{yd}$$

Assim, fica conhecida a parcela restante do momento resistente:

$$\Delta M_d = M_d - M_{wd}$$

Também,

$$\Delta M_d = R'_{sd} \cdot (d - d') = A'_{sd} \cdot \sigma'_{cd} \cdot (d - d') \quad e$$

$$\Delta M_d = R'_{sd2} \cdot (d - d') = A'_{s2} \cdot \sigma'_{cd} \cdot (d - d')$$

Que permitem determinar as áreas restantes de armadura A_{s2} e A'_s . De fato,

$$R'_{sd} = R'_{sd2} = \Delta M_d / (d - d') \quad e$$

$$A'_{s2} = R'_{sd2} / f_{yd}$$

O cálculo de A'_s , requer a determinação de tensão σ'_{sd} . Com $x \leq x_{lim}$, tem-se, no domínio 3 $\epsilon_c = 0,0035$ e, no domínio 2:

$$\epsilon_c = 0,010 \cdot x / (d - x) \quad (\text{por semelhança de triângulos})$$

Logo

$$\epsilon'_s = \epsilon_c (x - d') / x$$

que permite obter σ'_{sd} (no diagrama $\sigma \times \epsilon$ de armadura)

Finalmente

$$A'_s = R'_{sd} / \sigma'_s \quad e$$

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

LAJES RETANGULARES MACIÇAS

Lajes são elementos estruturais planos de concreto armado sujeitos a cargas transversais a seu plano. Os apoios das lajes são, geralmente, constituídos por vigas de piso. Nestes casos, o cálculo das lajes é feito, de maneira simplificada, como se elas fossem isoladas das vigas, com apoios livres à rotação e indeslocáveis à translação, considerando, contudo, a continuidade entre lajes contíguas.

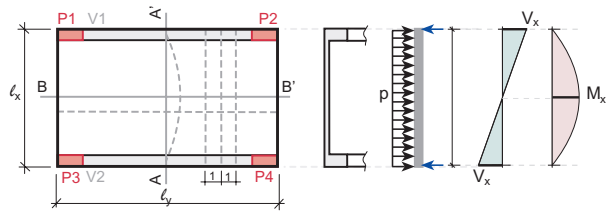
Do ponto de vista de comportamento à flexão, as lajes retangulares maciças podem ser classificadas em:

- Lajes armadas em uma direção: quando a flexão (curvatura) é bastante predominante segundo a direção paralela a um dos lados; correspondem às lajes apoiadas em lados opostos (isoladas e contínuas, com ou sem balanços laterais), e às lajes “alongadas” apoiadas em todo o perímetro.

- Lajes armadas em duas direções ou em cruz: quando as curvaturas paralelas aos lados são valores comparáveis entre si, são lajes apoiadas em todo seu contorno e com lados não muito diferentes entre si ($l \leq l_y / l_x \leq 2$).

LAJES ARMADAS EM UMA DIREÇÃO

Considere-se a laje esquematizada na figura a seguir:



Sejam, ℓ_x , o vão teórico da laje, normalmente, igual à distância entre os eixos dos vigas de apoio, e ℓ_y o seu comprimento. Os cortes AA e BB mostram, de forma esquemática, os deslocamentos apresentados pela laje ao ser submetida à uma carga distribuída uniforme de valor p . Constata-se a presença de curvatura e, portanto, de momento fletor segundo o corte AA. Segundo o corte BB ocorre, praticamente uma translação com curvatura e flexão desprezíveis.

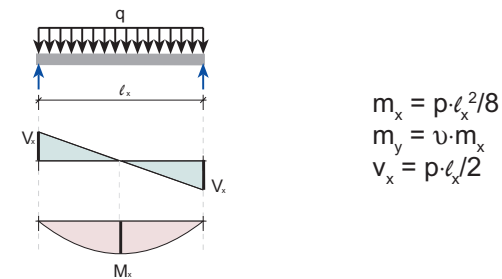
Considere-se, agora, faixas isoladas de larguras unitárias paralelas ao corte AA: o carregamento de uma dessas faixas é constituído de carga uniforme de valor p . Cada uma dessas faixas tem, aparentemente, o comportamento de uma viga isostática e o diagrama de momento fletor é uma parábola de ordenada igual a $p \cdot \ell_x^2 / 8$. Representa-se este momento fletor por m_x , com $m_x = p \cdot \ell_x^2 / 8$, na unidade $\text{kN} \cdot \text{m} / \text{m}$. Analogamente, a força cortante tem diagrama linear e seu valor máximo $v_x = p \cdot \ell_x / 2$. Para que as faces superior e inferior mantenham-se paralelas entre si aparece um momento fletor $m_y = \nu \cdot m_x$ atuando no plano paralelo ao lado ℓ_y , também por unidade de largura, sendo $m_y = 0,2 \cdot m_x$, pois no concreto $\nu = 0,2$. O momento fletor m_x é chamado de momento fletor principal e m_y de secundário.

Esforços Solicitantes

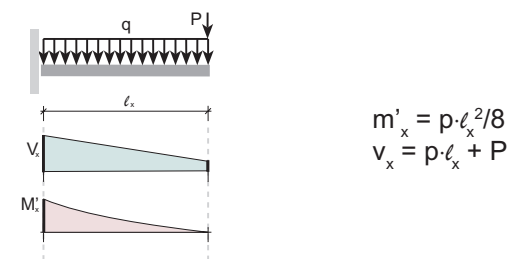
- Laje Isolada: nesse caso, a faixa de largura unitária da laje corresponde a uma viga isolada sujeita a carga distribuída uniforme;
- Laje em balanço: nesse caso, a faixa de largura unitária da laje corresponde a uma viga em balanço e o carregamento consiste numa carga uniforme distribuída p mais uma concentrada P aplicada junto à extremidade do balanço.
- Laje contínua: nesse caso, a faixa de largura unitária da laje corresponde a uma viga contínua.

Abaixo estão os gráficos destes 3 casos:

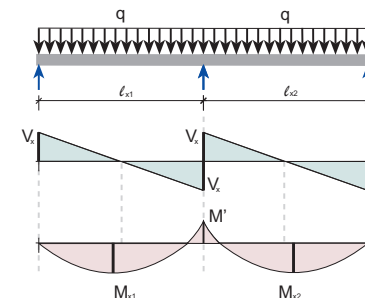
Esforços Máximos na Laje Isolada



Esforços Máximos na Laje em Balaço



Esforços Máximos na Laje Contínua

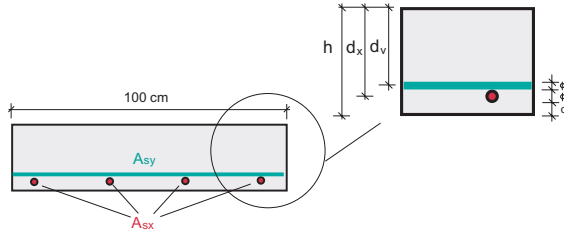


Dimensionamento à Flexão (Estado Limite Último - ELU)

O dimensionamento é feito para uma seção retangular de largura unitária (normalmente, $b = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$) e altura igual à espessura total do laje, h .

Altura útil

A armadura de flexão será distribuída no largura de 100 cm. Em geral, tem-se nos vãos, num mesmo ponto, dois momentos flectores (m_x e m_y , positivos) perpendiculares entre si. Desta forma, a cada um desses momentos corresponde uma altura útil; d_x para o momento flector m_x e d_y para o momento flector m_y . Normalmente, m_x é maior que m_y ; por isso costuma-se adotar $d_x > d_y$; para isto, a armadura correspondente ao momento flector m_y (A_{sy}) é colocada sobre a armadura correspondente ao momento flector m_x (A_{sx}):



Conforme a figura acima, tem-se:

$$d_x = h - c - \phi_x / 2 \quad \text{e}$$

$$d_y = h - c - \phi_x - \phi_y / 2$$

onde

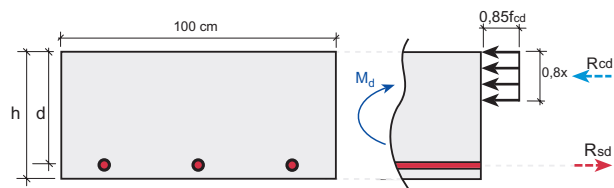
c = cobrimento mínimo de armadura em lajes, fixado em 0,5 cm nas lajes protegidas com argamassa de espessura mínima de 1 cm (NBR 6118)
 ϕ_x = diâmetro da armadura A_{sx} correspondente a m_x
 ϕ_y = diâmetro da armadura A_{sy} correspondente a m_y

Nas lajes maciças revestidas, usuais em edifícios, pode-se adotar aproximadamente:

$$d_x = h - c - 0,5 \text{ cm} \quad \text{e}$$

$$d_y = h - c - 1,0 \text{ cm}$$

Cálculo das Armaduras



Nas lajes, normalmente, a flexão conduz a um dimensionamento como peça subarmada com armadura simples. Assim, conforme a figura acima, a equação de equilíbrio conduz a

$$m_d = 0,68 \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4x) \quad \text{com} \quad m_d = \gamma_c \cdot m = 1,4 \text{ m}$$

Resultando, para a altura de zona comprimida o valor

$$x = 1,25 \cdot d \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{m_d}{0,425 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right]$$

e a armadura

$$A_s = \frac{m_d}{f_{yd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)}$$

onde

$$A_d = A_{sx} \quad \text{para} \quad m = m_x \quad \text{e}$$

$$A_d = A_{sy} \quad \text{para} \quad m = m_y$$

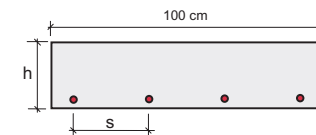
Escolha das barras

A escolha da bitola o espaçamento (ϕ e s) é feita para as bitolas comerciais com as seguintes recomendações:

$$\phi_{\min} = 4 \text{ mm} \leq \phi \leq \phi_{\max} = h/10$$

$$s_{\min} = 8 \text{ mm} \leq s \leq s_{\max} = 20 \text{ cm (p/ arm. princ. limitar a } 2h)$$

Para as bitolas, adota-se um mínimo de 4 mm e um máximo correspondente a um décimo da espessura da laje. O espaçamento mínimo de 8 cm tem por finalidade facilitar a concretagem da laje, e o espaçamento máximo visa garantir a uniformidade de comportamento admitida nos cálculos. A tabela a seguir mostra as bitolas comerciais mais utilizadas:



ϕ (mm)	A_{s1} (cm)	m_1 (kg/m)
4,0	0,125	0,10
5,0	0,200	0,16
6,3	0,315	0,25
8,0	0,500	0,40
10,0	0,800	0,63

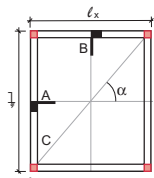
ϕ = diâmetro nominal da barra em mm

A_{s1} = área nominal da seção transversal de uma barra

m_1 = massa de uma barra por metro linear

LAJES ARMADAS EM DUAS DIREÇÕES (EM CRUZ)

Considere-se a laje esquematizada na figura a seguir, apoiada em todo o seu contorno sobre vigas, sujeita à carga distribuída p e sejam:

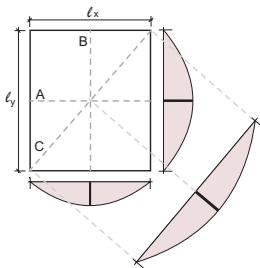


l_x = o menor vão teórico
 l_y = o maior vão teórico ($l_y \geq l_x$)

Normalmente consideram-se as hipóteses simplificadoras:

- vigas rígidas à flexão
- continuidade de lajes vizinhas quando no mesmo nível

A deformada da laje segundo os cortes A (paralela a l_x) e B (paralela a l_y) estão esquematizadas na figura a seguir:



Pode-se notar a presença de curvaturas comparáveis segundo os dois cortes, sugerindo a presença de momentos fletores comparáveis:

m_x = momento por unidade de largura com plano de atuação paralelo a l_x ;
 m_y = momento por unidade de largura com plano de atuação paralelo a l_y .

Considere-se o corte genérico CC e a deformada segundo este corte. Nota-se também a presença de momento, podendo este ser expresso por:

$$m_x = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha$$

Esforços nas lajes isoladas

Nas lajes interessam, particularmente, os momentos fletores máximos no vãos e sobre os apoios (quando engastados). Existem tabelas que nos fornecem estes momentos máximos para alguns casos usuais de lajes maciças. Nos edifícios,

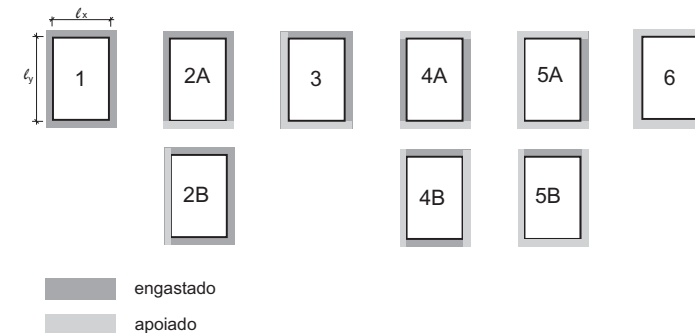
onde o carregamento usual é constituído de carga distribuída uniforme, são muito úteis as tabelas de Czerny preparadas com coeficiente de Poisson 0,2 (admitido para o concreto). Os momentos fletores extremos são dados por:

$$m_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\alpha_x} ; m_y = \frac{p \cdot l_y^2}{\alpha_y} ; m'_x = \frac{p \cdot l_x^2}{\beta_x} ; m'_y = \frac{p \cdot l_y^2}{\beta_y}$$

onde as variáveis e estão tabeladas de em função dos seguintes parâmetros:

- Tipo de carga (por ex. distribuída uniforme);
- Condições de apoio da laje (tipo de apoio);
- Relação (l_y / l_x).

Particularmente, interessa-nos o tipo de carga distribuída uniforme, e os tipos de apoio indicados a seguir:



Método simplificado aplicável a pisos usuais de edifícios

Para os pisos usuais de edifícios residenciais e comerciais pode ser aplicado o método simplificado exposto a seguir:

Lajes isoladas: inicialmente separam-se as lajes admitindo-se, para cada uma delas, as seguintes condições de apoio:

- Apoio livre, quando não existir laje vizinha a este apoio;
- Apoio engastado, quando existir laje vizinha no mesmo nível, permitindo assim a continuidade da armadura negativa de flexão de uma laje para a outra;
- Vigas rígidas de apoio da laje;

e, calculam-se os momentos fletores máximos (em valor absoluto) nestas lajes isoladas (m_x , m_y , m'_x , m'_y).

Correção dos momentos fletores devido à continuidade entre as lajes vizinhas:

- Momentos sobre os apoios comuns às lajes adjacentes: adota-se para o momento fletor de compatibilização, o maior valor entre $0,8 m'_x$ e $(m'_1 + m'_2) / 2$, onde m'_1 e m'_2 são os valores absolutos dos momentos negativos nas lajes adjacentes junto ao apoio considerado, e m'_x , o maior momento entre m'_1 e m'_2 .
- Momentos no vãos: para sobrecargas usuais de edifícios podem ser adotados os momentos fletores obtidos nas lajes isoladas; portanto, sem nenhuma correção devido à continuidade. Para sobrecargas maiores convém efetuar essas correções.

Altura útil

Da mesma forma que para as lajes armadas em uma só direção, as alturas úteis são dadas por:

$$d_x = h - c - \phi_x / 2 \quad \text{e} \quad d_y = h - c - \phi_x - \phi_y / 2$$

podendo ser estimadas, nas lajes usuais, por

$$d_x = h - c - 0,5 \text{ cm} \quad \text{e} \quad d_y = h - c - 1,0 \text{ cm}$$

cálculo de A_s

$$x = 1,25 \cdot d \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{m_d}{0,425 \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}} \right]$$

e a armadura

$$A_s = \frac{m_d}{f_{yd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)}$$

onde

$$\begin{aligned} A_s &= A_{sx} \text{ para } m = m_x \\ A_s &= A_{sy} \text{ para } m = m_y \\ A_s &= A'_s \text{ para } m = m' \end{aligned}$$

Armaduras mínimas

- Armaduras de vão:

$$(A_{sx} \text{ ou } A_{sy}) \geq 0,9 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \text{e}$$

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot h} \geq \begin{cases} 0,15 \% \text{ (CA50 / 60)} \\ 0,20 \% \text{ (CA25)} \end{cases}$$

- Armaduras sobre os apoios de continuidade:

$$A_s \geq 1,5 \text{ cm}^2/\text{m} \quad \text{e}$$

$$\rho = \frac{A'_s}{b \cdot h} \geq \begin{cases} 0,15 \% \text{ (CA50 / 60)} \\ 0,20 \% \text{ (CA25)} \end{cases}$$

Escolha das barras

- Diâmetro : $4 \text{ mm} \leq \phi \leq h/10$

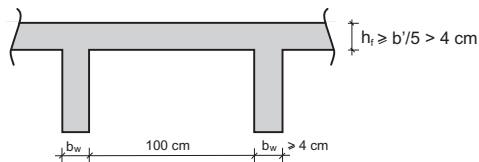
- Espaçamento entre as barras:

$$\text{armadura nos vãos:} \quad A_s \quad 8 \text{ cm} \leq s \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ 3h \end{cases}$$

$$\text{armadura nos apoios:} \quad A'_s \quad 8 \text{ cm} \leq s \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ 2h \end{cases}$$

LAJES NERVURADAS

As lajes maciças podem ser recomendadas para vãos até cerca de 5m. Para vãos maiores, ela se torna antieconômica devido ao seu grande peso próprio. Uma opção melhor para este caso pode ser conseguida através das lajes nervuradas. As nervuras tem a função de garantir a altura necessária para a armadura de tração resistir à flexão.

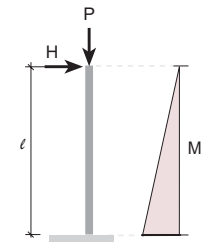


Para estas lajes tem-se as seguintes recomendações:

- Os esforços solicitantes podem ser obtidos pela teoria das placas para faixas de largura unitária; multiplicando estes esforços pelos espaçamentos entre nervuras tem-se os esforços atuantes em cada nervura;
- A mesa deve ser verificada à flexão se $b' > 50$ cm ou se houver carga concentrada atuando diretamente sobre ela;
- A verificação do cisalhamento nas nervuras pode ser feita como laje se $b' \leq 50$ cm e, como viga em caso contrário.

PILARES

Pilares são estruturas de concreto armado que transmitem as cargas do edifício para a fundação. A carga principal, nos edifícios, tem o sentido vertical (peso). Por isso, o esforço solicitante nos pilares é constituído essencialmente pela força normal de compressão. Ações outras como, por exemplo, a do vento, introduzem solicitações transversais nos pilares. Como a força normal de compressão é grande, deve-se ainda considerar os efeitos provenientes do desaprumo construtivo, da indefinição do ponto de aplicação das reações das vigas e dos deslocamentos apresentados pelos pilares (efeito de segunda ordem). De fato, considere-se o pilar em balanço esquematizado a seguir e seus esforços solicitantes usuais:



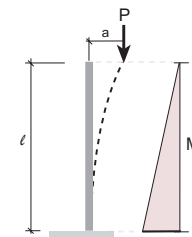
Conforme a figura acima, tem-se que M_h = momento fletor devido a H, com $l = 4$ m; $P = 800$ kN e $H = 10$ kN. Assim, o momento máximo na base do pilar vale:

$$H \cdot l = 10 \cdot 4,0 = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

A força normal N (de compressão) vale 800 kN.

Considere-se agora, como mostra a figura seguinte, o efeito de um eventual desaprumo (a) do pilar de, digamos, 2 cm. O deslocamento transversal da carga P produz um momento fletor adicional no pilar. o momento adicional máximo vale:

$$M_a = P \cdot a = 800 \cdot 0,02 = 16 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



Para se ter uma idéia do efeito dos deslocamentos (efeito de segunda ordem), considere-se, no momento, o comportamento elástico linear do concreto com $E_c = 3000 \text{ kN/cm}^2$ e seção transversal de $25 \times 25 \text{ cm}$ (seção quadrada). O deslocamento (usual) do topo do pilar devido a H vale:

$$a_1 = \frac{H \cdot \ell^3}{3 \cdot E_c \cdot I_c} = \frac{10 \cdot 400^3}{3 \cdot 3000 \cdot (24^4/12)} = 2,18 \text{ cm}$$

A consideração do equilíbrio do pilar na sua configuração deformada, acarreta um momento fletor adicional devido ao deslocamento transversal da força P. O deslocamento transversal final pode ser estimado através da expressão:

$$a = a_1 + a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{1 - P / P_{fl}}$$

onde

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 \cdot E_c \cdot I_c}{\ell^2} = \frac{\pi^2 \cdot E_c \cdot A_c}{\lambda^2}, \text{ com } \lambda = \frac{\ell_c}{i_c} \text{ e } i_c = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}}$$

sendo

ℓ_0 = comprimento de flambagem do pilar

$\ell_0 = 2 \cdot \ell$ no pilar em balanço;

$\ell_0 = \ell$ no pilar biarticulado com alongamento livre;

$\ell_0 = \ell$, biengastado com deslocamento transversal livre;

$\ell_0 = 0,7 \cdot \ell$, engastado de um lado e articulado do outro;

i_0 = raio de giração da seção do pilar

Assim

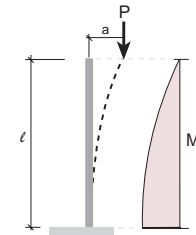
$$i_c = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} = \sqrt{\frac{24^4/12}{25^2}} = 7,22 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{\ell_c}{i_c} = \frac{2 \cdot 400}{7,22} = 111$$

$$P_{fl} = \frac{\pi^2 \cdot E_c \cdot I_c}{\ell^2} = \frac{\pi^2 \cdot E_c \cdot A_c}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 3000 \cdot 25^2}{111^2} = 1502 \text{ kN}$$

$$a = a_1 + a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{1 - P / P_{fl}} = 2,18 \cdot \frac{1}{1 - 800 / 1502} = 4,66 \text{ cm}$$

O momento fletor adicional máximo vale $M_2 = P \cdot a$, então $M_2 = 800 \cdot 0,0466 = 37,3 \text{ kN}\cdot\text{m}$. A figura a seguir representa M_2 :

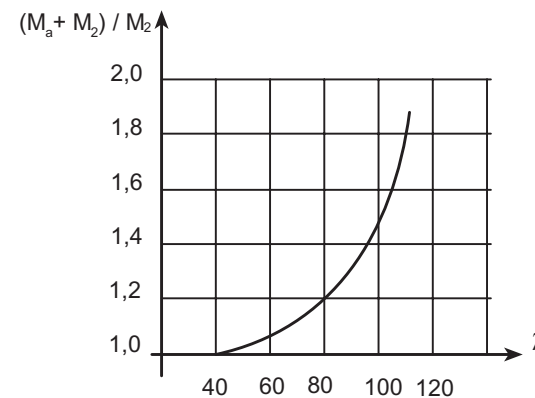


O momento máximo na base do pilar vale:

$$\begin{aligned} M &= M_h + M_a = M_2 = (1 + M_1/M_h + M_2/M_h) \\ M &= 40 \cdot (1 + 16/40 + 37,3/40) \\ M &= 40 \cdot (1 + 0,40 + 0,93) \end{aligned}$$

Portanto, nesse caso, M_a representa 40% de M_h e, M_2 , 93%, mostrando a importância do desaprumo e do deslocamento (efeito de segunda ordem) no esforço solicitante final. Convém lembrar que ainda existem solicitações adicionais provenientes do comportamento não linear com concreto armado e da fluência que age sobre o efeito da carga permanente.

Outro fator de grande importância é a esbelteza do pilar (índice de esbelteza λ), que pode ser notado através da expressão a_2 , pois quanto maior for o λ , maior será o momento de segunda ordem M_2 . Considere-se, no exemplo visto anteriormente, o efeito da variação da seção transversal de $25 \times 25 \text{ cm}$ até $90 \times 90 \text{ cm}$. A figura a seguir apresenta os resultados obtidos:



Nota-se que o efeito de segunda ordem é desprezível para valores de ℓ até em torno de 40 e que a partir deste valor a sua influência é cada vez maior. Assim, para efeito de um método de verificação e de cálculo, a NBR 6118 propõe a seguinte classificação dos pilares em função do índice de esbeltez:

- Pilar Curto: para $\lambda \leq 40$; pode-se desprezar o efeito de segunda ordem e fluência;
- Pilar Medianamente Esbelto: para $40 \leq \lambda \leq 80$; o efeito de segunda ordem deve ser considerado (podendo-se utilizar o método do pilar padrão) e pode-se desprezar o efeito da fluência;
- Pilar Esbelto: para $80 \leq \lambda \leq 140$; o efeito de segunda ordem deve ser considerado (podendo-se utilizar o método do pilar padrão) e deve-se considerar o efeito da fluência (podendo ser estimada através de uma excentricidade complementar equivalente);
- Pilar Muito Esbelto: para $140 \leq \lambda \leq 200$; o efeito de segunda ordem e a fluência devem ser considerados e calculados de forma "rigorosa", além disso o coeficiente de ponderação das ações deve ser majorado, passando a valer:

Tipos de Pilares

Normalmente, os pilares de edifícios podem ser agrupados em dois conjuntos:

- Pilares de Contraventamento: são aqueles que, devido à sua grande rigidez, permitem considerar os diversos pisos do edifício como, praticamente, indeslocáveis (caixas de elevadores, pilares enrigecidos); o seu cálculo exige sua consideração como um todo;
- Pilares contraventados: são constituídos pelos pilares menos rígidos, onde as extremidades de cada lance podem ser consideradas indeslocáveis, graças aos pilares de contraventamento; seu cálculo pode ser feito de forma isolada em cada lance. Os pilares contraventados podem ser agrupados nos seguintes tipos:

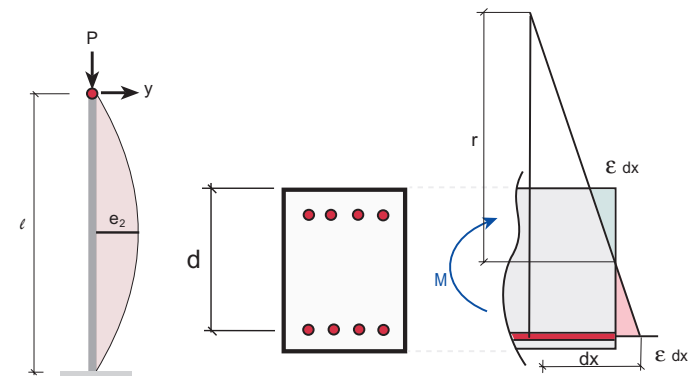
- Pilares internos: situados internamente ao piso; para situação de projeto considera-se como esforço solicitante a força normal (N) de compressão;
- Pilares de extremidade: situados nas bordas do piso; para situação de projeto, considera-se como esforços solicitantes a força normal (N) de compressão e o momento fletor (M), atuando segundo o plano constituído pelo pilar e pela viga; este par de esforços normalmente é substituído por (N) e ($e_1 = M/N$).

-Pilares de canto: situados junto aos cantos do piso; para situação de projeto considera-se como esforços solicitantes a força normal (N) de compressão e dois momentos fletores (M_x e M_y), atuando segundo os planos constituídos pelo pilar e por cada uma das vigas nele apoiadas; normalmente o conjunto de valores (N, M_x e M_y) é substituído por (N), ($e_{ix} = M_x/N$) e ($e_{iy} = M_y/N$).

Situação de cálculo

A situação de cálculo corresponde à verificação do estado limite último (ELU) de cada seção do pilar; aos esforços provenientes da situação de projeto são acrescentados os seguintes efeitos:

- A indefinição do ponto de aplicação da força normal e o desaprumo do pilar que podem ser considerados através da chamada excentricidade acidental e_a estimada, conforme a NBR 6118 por $e_a \geq 2$ cm ou $h/30$, com h sendo a dimensão do pilar segundo a dimensão considerada;
- Os efeitos de segunda ordem quando $\lambda \geq 40$ que podem ser considerados através da excentricidade e_2 . Esta excentricidade pode ser estimada, para pilares medianamente esbeltos, através do método do pilar padrão. As hipóteses admitidas neste método são:
 - Seção constante do pilar (inclusive armadura);
 - Configuração fletida de forma senoidal.



Conforme a figura anterior, temos:

$$y = e_2 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{\ell_0}; \dot{y} = e_2 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{\ell_0}; \ddot{y} = -\left(\frac{\pi}{\ell_0}\right)^2 e_2 \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{\ell_0} = -\left(\frac{\pi}{\ell_0}\right)^2 y$$

Com $\frac{1}{r} = -\ddot{y}$ tem-se, para a seção do meio do vão $\frac{1}{r} = \left(\frac{\pi}{\ell_0}\right)^2 e_2$

ou
$$e_2 = \frac{1/r}{\left(\pi/\ell_0\right)^2} = \frac{\ell_0^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

Por outro lado, sendo $1/r = (\varepsilon_{co} + \varepsilon_o)/d$, a NBR 6118 permite considerar pilares medianamente esbeltos e esbeltos:

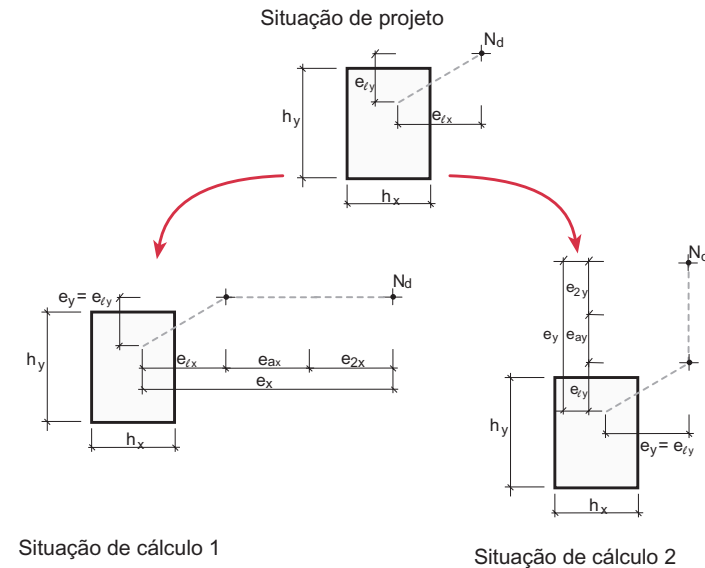
$$\frac{1}{r} = \frac{0,0035 + f_{yd} / E_s}{h \cdot [(v_d + 0,5) p \geq 1]}$$

onde $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$ e $v_d = N_d / A_c \cdot f_{cd}$

O comprimento de flambagem do pilar (ℓ_0) é tomado aproximadamente igual ao pé direito, pois as extremidades de cada lance do pilar podem ser consideradas indeslocáveis. Os efeitos de fluência (quando $\lambda > 80$) podem ser considerados através da excentricidade complementar equivalente e_o .

Dimensionamento da Seção Retangular (armadura simétrica)

Costuma-se dimensionar uma seção retangular com armadura simétrica considerando-se a mais crítica entre as situações de projeto indicadas na figura a seguir. No caso geral (pilar de canto), tem-se duas situações de cálculo sujeitas a flexão composta oblíqua (FCO); da situação 1 resulta a taxa mecânica ω_1 e da situação 2, ω_2 ; a maior destas taxas define a armadura da seção. Estas situações de cálculo são obtidas através do “deslocamento máximo” do ponto de aplicação da força normal segundo h_x (situação 1) e, segundo h_y (situação 2). Para pilares internos, tem-se duas situações de cálculo sujeitas a flexão composta normal (FCN). Nos pilares de extremidade resultam uma FCN e uma FCO. Nesta última situação, pode-se, em geral, desprezar a excentricidade inicial resultando, então, dois dimensionamentos a FCN.



Dimensões Mínimas

Para a seção retangular de dimensões $h_x \cdot h_y$ seja b o menor dos lados e h o maior. recomenda-se:

$$b \geq 20 \text{ cm e } \ell_0/25, \text{ onde } \ell_0 \text{ é o pé direito livre. Neste caso, toma-se } \gamma_f = 1,4.$$

Excepcionalmente $12 \text{ cm} \leq b \leq 20 \text{ cm}$ e $h \leq 60 \text{ cm}$, devendo-se utilizar, neste caso, $\gamma_f = 1,8$.

Recomenda-se que a armadura tenha distribuição simétrica e que sua taxa geométrica (ρ) obedeça a seguinte condição:

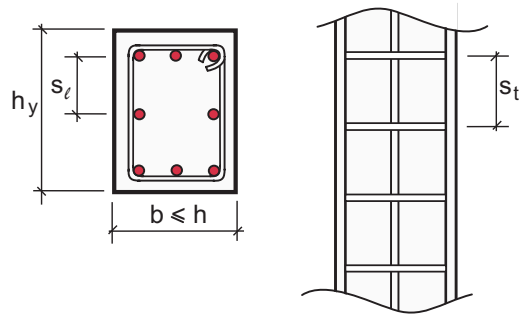
$$\rho_{\min} \leq \rho = A_s / A_o \leq \rho_{\max}$$

onde $\rho_{\max} = 3\%$ (6% nas emendas)

$$\rho_{\min} = 0,8\% \text{ se } \lambda > 30$$

$$\rho_{\min} = 0,5\% \text{ se } \lambda \leq 30$$

Disposições Construtivas, Bitolas e Espaçamentos



As disposições construtivas, bitolas e espaçamentos apresentados na figura acima estão assim convencionados:

$$\begin{aligned}
 &10 \leq \rho \leq b/10 ; \\
 &4 \text{ cm ou } 4 \phi_t \leq s_t \leq 40 \text{ cm} ; \\
 &\phi_t \geq 5 ; \\
 &7 \text{ cm} \leq s_t \leq \begin{array}{|l} 30 \text{ cm} \\ b \\ 12 \phi_t \\ 190 \phi_t^2 / \phi_c \end{array} \quad \text{CA50A}
 \end{aligned}$$

Travamentos Adicionais na Seção transversal

A possibilidade de flambagem das armaduras é inibida pelos estribos que introduzem pontos de travamento, a cada distância s_t . Este travamento é integral junto aos cantos, mas travamentos adicionais a cada $20 \phi_t$, são necessários nas seções alongadas.