



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

Departamento de Estruturas



RESUMO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS II



Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia
Bolsista Ped: Elias Antonio Nicolas
Pad: Bianca Lopes de Oliveira

Campinas, Fevereiro - 2006

SUMÁRIO

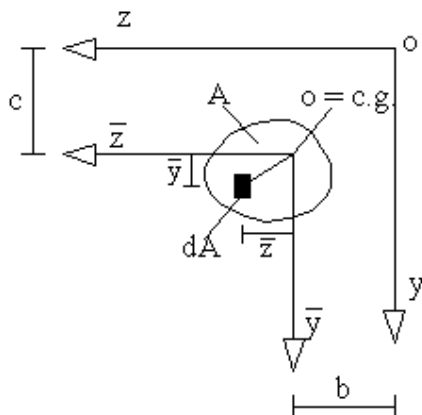
<u>1-FLEXÃO GERAL</u>	3
<u>2-TORÇÃO</u>	25
<u>3-CENTRO DE CISALHAMENTO EM SEÇÕES SIMÉTRICAS</u>	48
<u>4-TEORIA DAS TENSÕES</u>	62
<u>5-TEORIA DAS DEFORMAÇÕES</u>	73
<u>6-ENERGIA DE DEFORMAÇÃO</u>	81
<u>7-CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA</u>	97
<u>8-FLAMBAGEM</u>	111
<u>9-BIBLIOGRAFIA</u>	121

OBSERVAÇÃO INICIAL

Esta apostila tem por objeto dar ao aluno que frequenta o curso de EC-501 – Resistência dos Materiais II um material que o auxilie no acompanhamento das aulas regulares. Não tem por meta substituir outras apostilas ou livros de Resistência dos Materiais. Constitui-se como notas de um caderno de um aluno, com a colocação de alguns exemplos adicionais.

1-FLEXÃO GERAL

- Momentos de segunda ordem:



\bar{y}, \bar{z} eixos centrais de inércia.

- Momentos de inércia centrais:

$$I_{\bar{y}} = \int_A \bar{z}^2 \cdot \partial A$$

$$I_{\bar{z}} = \int_A \bar{y}^2 \cdot \partial A$$

- Produto de inércia:

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = \int_A \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \partial A$$

$$I_y = \int_A z^2 \cdot \partial A = \int_A (b + \bar{z})^2 \cdot \partial A$$

$$I_y = \int_A (b^2 + 2 \cdot b \cdot \bar{z} + \bar{z}^2) \cdot \partial A$$

$$I_y = b^2 \cdot A + \int_A \bar{z}^2 \cdot \partial A$$

$$\text{Momento estático} = S = \int_A \bar{z} \cdot \partial A$$

S = 0 em relação ao c.g.

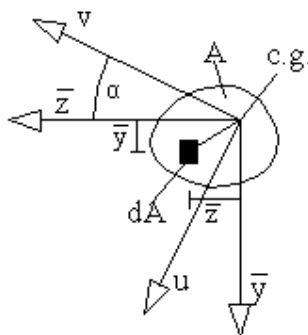
$$I_y = b^2 \cdot A + I_{\bar{y}}$$

$$I_z = c^2 \cdot A + I_{\bar{z}}$$

$$I_{yz} = b \cdot c \cdot A + I_{\bar{y}\bar{z}}$$

- “b” e “c” são coordenadas do c.g. em relação ao sistema (y,z).

- **Rotação dos eixos (u,v):**



Matriz de transformação de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$u = \bar{y} \cdot \cos \alpha + \bar{z} \cdot \sin \alpha$$

$$v = -\bar{y} \cdot \sin \alpha + \bar{z} \cdot \cos \alpha$$

$$I_u = \int_A v^2 \cdot \partial A$$

$$I_u = \int_A (-\bar{y} \cdot \sin \alpha + \bar{z} \cdot \cos \alpha)^2 \cdot \partial A$$

$$I_u = \int_A \bar{y}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \partial A + \int_A \bar{z}^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \partial A + \int_A -2 \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \partial A$$

$$I_u = I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - 2 \cdot I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_v = \int_A u^2 \cdot \partial A = \int_A (\bar{y} \cos \alpha + \bar{z} \sin \alpha)^2 \cdot \partial A$$

$$I_v = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + 2 \cdot I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot \partial A = \int_A (\bar{y} \cos \alpha + \bar{z} \sin \alpha) \cdot (-\bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha) \cdot \partial A$$

$$I_{uv} = (I_y - I_z) \sin \alpha \cos \alpha + I_{yz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

- Utilizando Arcos duplos: $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Tem-se:

$$I_u = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{yz} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_v = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{yz} \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{yz} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\left[I_u - \left(\frac{I_y + I_z}{2} \right) \right]^2 = \left(\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{yz} \cdot \sin 2\alpha \right)^2$$

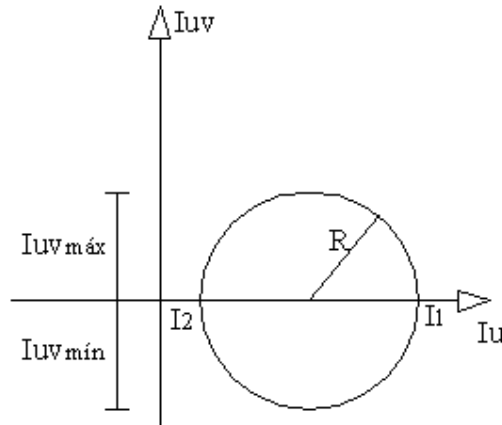
$$(I_{uv})^2 = \left(\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{yz} \cdot \cos 2\alpha \right)^2$$

$$I_u - \left(\frac{I_y + I_z}{2} \right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + I_{yz}^2$$

- Equação da circunferência

- $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$
- $(y_0 = 0)$
- (x_0, y_0) posição do centro.

Círculo de Mohr:



I_1 = momento de inércia máximo

I_2 = momento de inércia mínimo.

Em I_1 e I_2 tem-se: $I_{uv} = 0$.

$$I_{uv} = \frac{I_y^- - I_z^-}{2} \cdot \text{sen} 2\alpha + I_{yz}^- \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{yz}^-}{I_z^- - I_y^-}$$

Propriedade:

$$I_y + I_z = I_y^- + I_z^- = I_u + I_v = I_1 + I_2 = \text{cte}$$

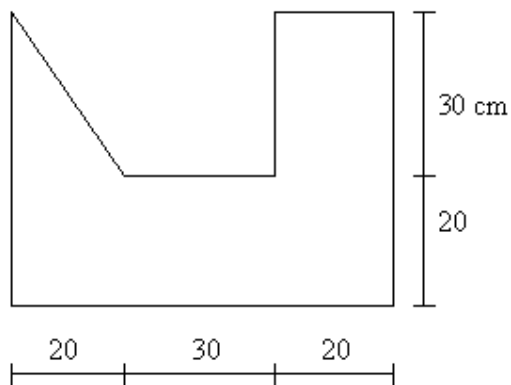
Valores de I_1 e I_2 .

$$I_1 = \left(\frac{I_y^- + I_z^-}{2} \right) + \sqrt{\left(\frac{I_y^- - I_z^-}{2} \right)^2 + I_{yz}^{-2}}$$

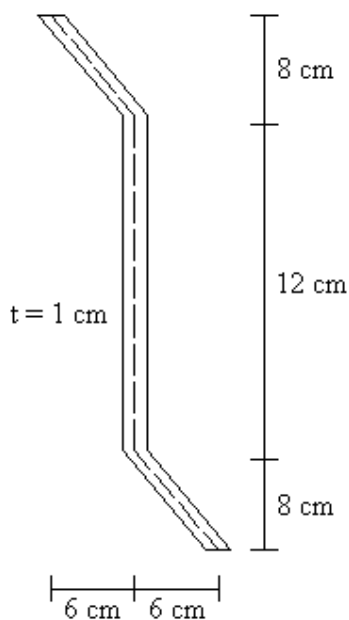
$$I_2 = \left(\frac{I_y^- + I_z^-}{2} \right) - \sqrt{\left(\frac{I_y^- - I_z^-}{2} \right)^2 + I_{yz}^{-2}}$$

Exercícios:

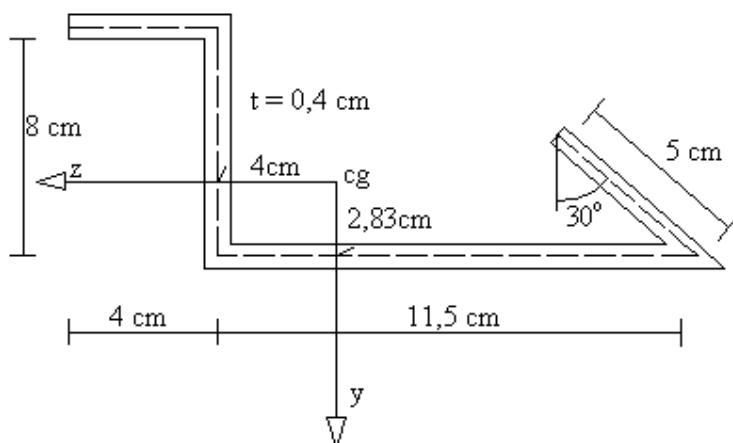
- 1) Calcular os momentos principais (I_1 e I_2) de inércia e suas direções (α_1 e α_2).



- 2) Calcular os momentos principais (I_1 e I_2) de inércia e suas direções (α_1 e α_2).

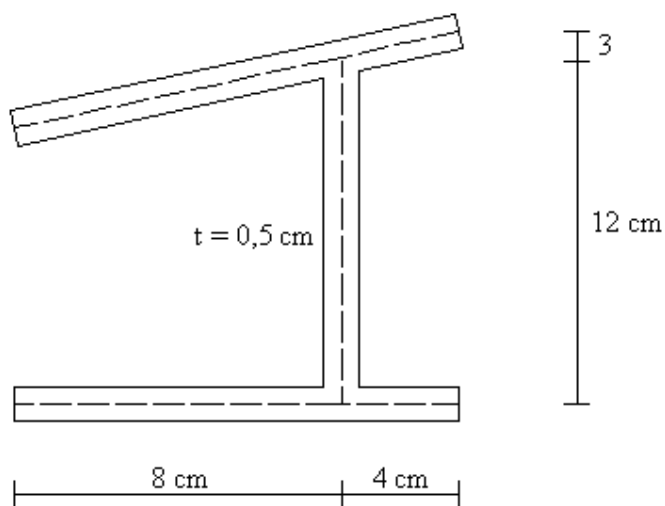


3) Calcular os momentos principais (I_1 e I_2) de inércia e suas direções (α_1 e α_2).



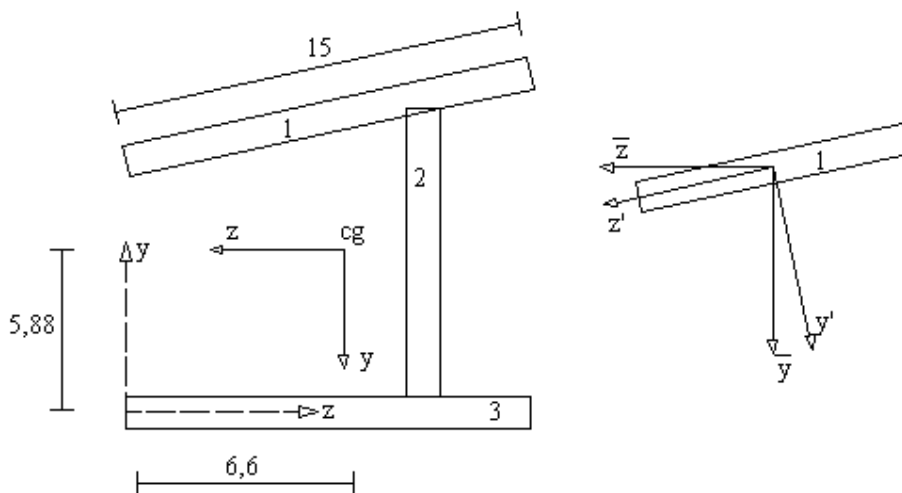
4) Calcular os momentos principais (I_1 e I_2) de inércia e suas direções (α_1 e α_2).

(resolvido)



Resolução do exercício 4:

- Divisão da seção em áreas:



Centro de gravidade (c.g.):

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{15 \cdot 0,5 \cdot 10,5 + 11,5 \cdot 0,5 \cdot 6 + 12 \cdot 0,5 \cdot 0}{(15 + 11,5 + 12) \cdot 0,5} = 5,88 \text{ cm}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{15 \cdot 0,5 \cdot 6 + 11,5 \cdot 0,5 \cdot 8 + 12 \cdot 0,5 \cdot 6}{(15 + 11,5 + 12) \cdot 0,5} = 6,60 \text{ cm}$$

Momento de inércia de cada seção:

Área 1:

$$I_{z'1} = \frac{15 \cdot 0,5^3}{12} = 0,16 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'1} = \frac{0,5 \cdot 15^3}{12} = 140,63 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz1} = 0 \Rightarrow \text{seção retangular}$$

Rotação dos eixos da área 1:

$$\alpha = 36,87^{\circ}$$

$$I_{y1}^- = I_u = \frac{I_y^- + I_z^-}{2} + \frac{I_y^- - I_z^-}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{yz}^- \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{y1}^- = 70,40 + 70,24 \cdot \cos(73,74) - 0 = 90,06 \text{ cm}^4$$

$$I_{z1}^- = I_v = \frac{I_y^- + I_z^-}{2} - \frac{I_y^- - I_z^-}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{yz}^- \cdot \sin 2\alpha$$

$$I_{z1}^- = 70,40 - 70,24 \cdot \cos(73,74) + 0 = 50,73 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz1}^- = I_{uv} = \frac{I_y^- - I_z^-}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{yz}^- \cdot \cos 2\alpha$$

$$I_{yz1}^- = 70,24 \cdot \sin(73,74) + 0 = 67,43 \text{ cm}^4$$

Área 2:

$$I_{y2} = \frac{11,5 \cdot 0,5^3}{12} = 0,12 \text{ cm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{0,5 \cdot 11,5^3}{12} = 63,37 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz2} = 0 \Rightarrow \text{seção retangular}$$

Área 3:

$$I_{y3} = \frac{0,5 \cdot 12^3}{12} = 72 \text{ cm}^4$$

$$I_{z3} = \frac{12 \cdot 0,5^3}{12} = 0,13 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz3} = 0 \Rightarrow \text{seção retangular}$$

Momento de inércia total:

$$I_y = 90,06 + 0,6^2 \cdot 15 \cdot 0,5 + 0,12 + 1,4^2 \cdot 11,5 \cdot 0,5 + 72 + 0,6^2 \cdot 12 \cdot 0,5 = 178,3 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 50,73 + 4,62^2 \cdot 15 \cdot 0,5 + 63,37 + 0,12^2 \cdot 11,5 \cdot 0,5 + 0,13 + 5,88^2 \cdot 12 \cdot 0,5 = 481,82 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 67,43 + (0,6) \cdot (-4,62) \cdot 15 \cdot 0,5 + (-0,12) \cdot (-1,4) \cdot 11,5 \cdot 0,5 + (5,88) \cdot (0,6) \cdot 12 \cdot 0,5 = 68,77 \text{ cm}^4$$

Direções principais:

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 68,77}{481,82 - 178,3} = 0,453$$

$$\alpha' = 12,2^\circ$$

$$\alpha'' = 102,2^\circ$$

Momentos principais de inércia:

$$I_{1,2} = \left(\frac{I_y + I_z}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2} \right)^2 + (I_{yz})^2}$$

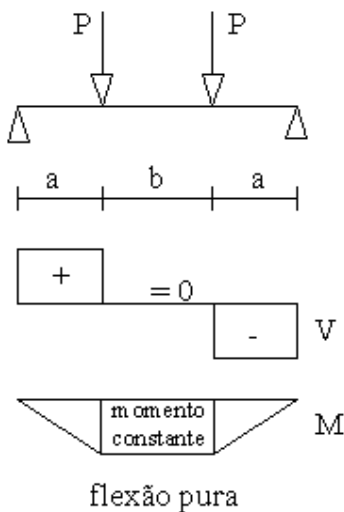
$$I_{1,2} = \left(\frac{178,3 + 481,82}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{178,3 - 481,82}{2} \right)^2 + (68,77)^2}$$

$$I_1 = 496,68 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 163,45 \text{ cm}^4$$

Tensões Normais à Seção Transversal

Seja:

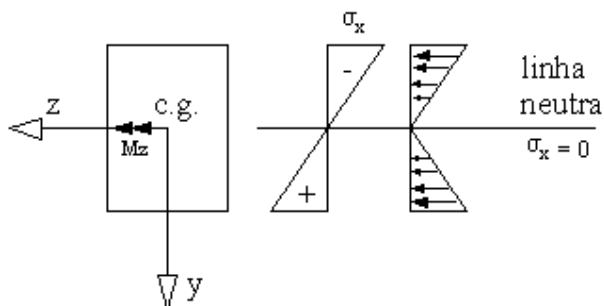


- **Flexão Pura:** quando atua apenas o momento fletor. ($N=V=0$).

Hipóteses:

1. A distribuição da tensão normal na seção é linear.
2. O material é isotrópico e segue a lei de Hooke ($\sigma = E \cdot \varepsilon$; $\tau = G \cdot \gamma$).
3. As seções planas permanecem planas após o carregamento.

- Tensão (σ_x)



Da hipótese (1): $\sigma_x = K \cdot y$ (variação linear), onde $K = \text{constante}$.

Sabe-se que $\sigma = \frac{F}{A}$ que resulta em $\partial F_x = \sigma_x \cdot \partial A$, e que $\partial M_z = \partial F_x \cdot y$. Assim:

$$\partial M_z = \sigma_x \cdot \partial A \cdot y = \sigma_x \cdot y \cdot \partial A$$

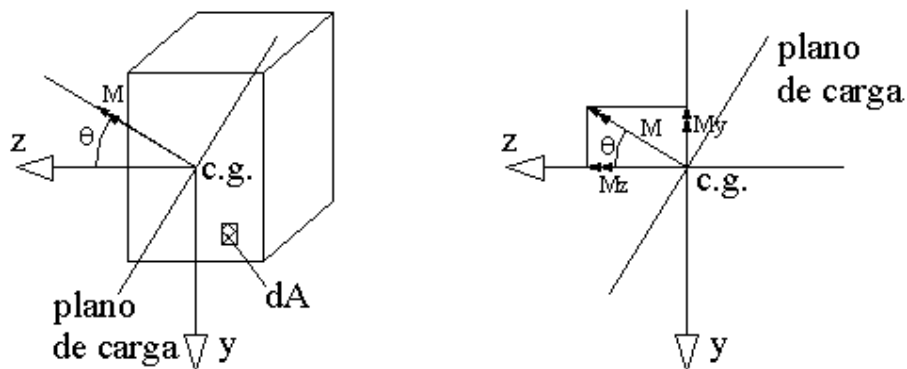
$$\partial M_z = K \cdot y^2 \cdot \partial A$$

$$M_z = \int_A \partial M_z = \int_A K \cdot y^2 \cdot \partial A \rightarrow M_z = K \cdot \int_A y^2 \cdot \partial A \rightarrow M_z = K \cdot I_z$$

Como $K = \frac{M_z}{I_z}$ e $\sigma_x = K \cdot y$, tem-se:

- $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$

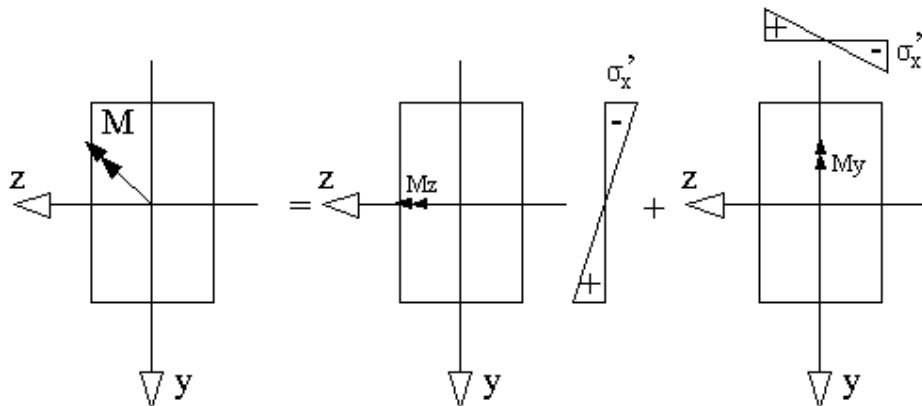
- **Flexão oblíqua pura:** o plano de cargas é inclinado de um ângulo θ em relação ao plano vertical. O vetor momento é inclinado do mesmo ângulo em relação ao eixo z .



Essa flexão é tratada como a superposição de duas flexões normais (M_z e M_y):

$$M_z = M \cdot \cos \theta$$

$$M_y = M \cdot \sin \theta$$



A tensão normal será: $\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x$, onde $\sigma'_x = K' \cdot y$ e $\sigma''_x = K'' \cdot z$.

Logo: $\sigma_x = K' \cdot y + K'' \cdot z$.

Sabe-se que $M_z = \int_A \partial F_x \cdot y = \int_A \sigma_x \cdot \partial A \cdot y$

$$M_z = \int_A (K' \cdot y + K'' \cdot z) \cdot y \cdot \partial A \rightarrow M_z = \int_A (K' \cdot y^2 + K'' \cdot y \cdot z) \cdot \partial A$$

$$M_z = \int_A (K' \cdot y^2) \cdot \partial A + \int_A (K'' \cdot y \cdot z) \cdot \partial A \rightarrow M_z = K' \cdot \int_A y^2 \cdot \partial A + K'' \cdot \int_A y \cdot z \cdot \partial A$$

- $M_z = K' \cdot I_z + K'' \cdot I_{yz}$

$$M_y = \int_A \partial F_x \cdot z = \int_A \sigma_x \cdot \partial A \cdot z \rightarrow M_y = \int_A (K' \cdot y + K'' \cdot z) \cdot z \cdot \partial A$$

$$M_y = \int_A (K'' \cdot z^2 + K' \cdot y \cdot z) \cdot \partial A \rightarrow M_y = \int_A (K'' \cdot z^2) \cdot \partial A + \int_A (K' \cdot y \cdot z) \cdot \partial A$$

$$M_y = K'' \cdot \int_A z^2 \cdot \partial A + K' \cdot \int_A y \cdot z \cdot \partial A$$

- $M_y = K' \cdot I_{yz} + K'' \cdot I_y$

Como o sistema yz é central de inércia, ou seja, $y, z \rightarrow u, v$ (momentos principais de inércia), tem-se:

$$I_{yz} = I_{uv} = 0$$

$$M_z = K' \cdot I_z + K'' \cdot I_{yz} \rightarrow M_v = K' \cdot I_v \rightarrow K' = \frac{M_v}{I_v}$$

$$M_y = K' \cdot I_{yz} + K'' \cdot I_y \rightarrow M_u = K'' \cdot I_u \rightarrow K'' = \frac{M_u}{I_u}$$

Assim:

$$\sigma_x = K' \cdot u + K'' \cdot v$$

$$\sigma_x = \frac{M_v}{I_v} \cdot u + \frac{M_u}{I_u} \cdot v$$

A linha neutra é o lugar geométrico dos pontos da seção transversal onde as tensões normais são nulas.

$$\sigma_x = \frac{M_v}{I_v} \cdot u + \frac{M_u}{I_u} \cdot v = 0 \rightarrow v = -\frac{M_v}{M_u} \cdot \frac{I_u}{I_v} \cdot u$$

Sendo

- $M_u = M \cdot \text{sen } \theta$
- $M_v = M \cdot \text{cos } \theta$

Substituindo:

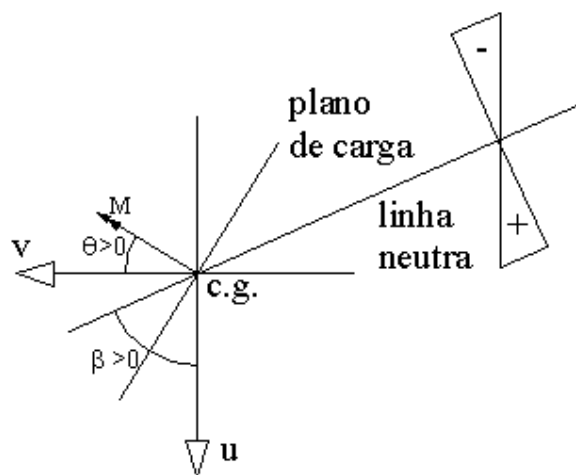
$$v = -\frac{M \cdot \text{cos } \theta}{M \cdot \text{sen } \theta} \cdot \frac{I_u}{I_v} \cdot u$$

$$v = -\frac{1}{\text{tg } \theta} \cdot \frac{I_u}{I_v} \cdot u$$

Essa é a equação da linha neutra.

$$\text{Se } \text{tg } \beta = -\frac{1}{\text{tg } \theta} \cdot \frac{I_u}{I_v}$$

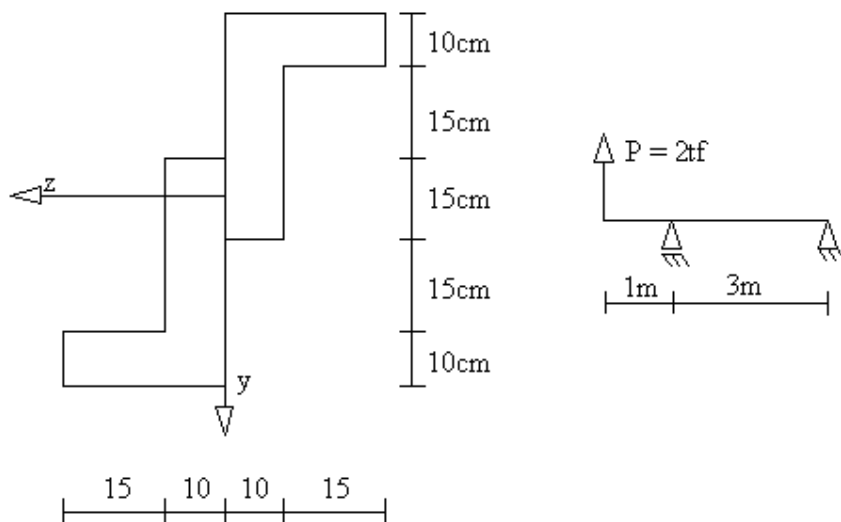
$$\therefore v = \text{tg } \beta \cdot u$$



Exercícios:

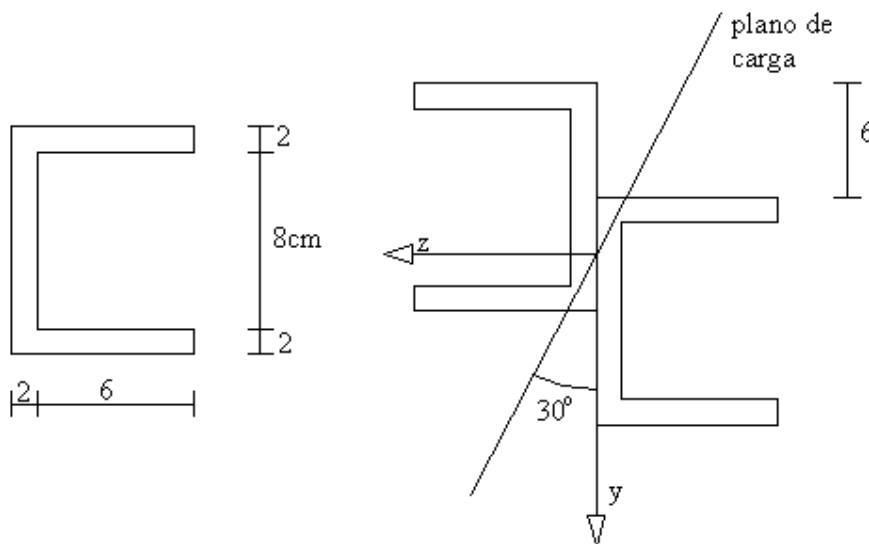
5) Calcular os valores extremos de tensão (tração e compressão) que surgirão na viga. O peso próprio é desprezado. A carga P é vertical e passa pelo c.g. da seção.

Dados: $I_y = 124.167\text{cm}^4$, $I_z = 461.042\text{cm}^4$, $I_{yz} = 194.375\text{cm}^4$.



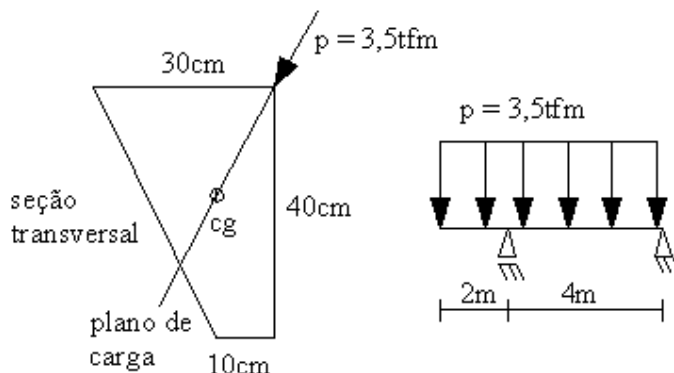
6) Qual deve ser o valor do momento fletor admissível num plano que forma com o eixo y um ângulo de 30° ? Dados: $I_y = 1408\text{cm}^4$, $I_z = 2656\text{cm}^4$, $I_{yz} = -864\text{cm}^4$,

$\bar{\sigma} = 1000\text{tf/cm}^2$



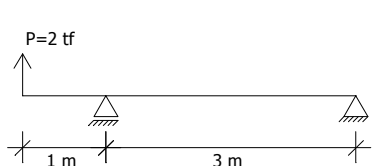
7) Determinar na seção crítica a linha neutra e calcular a flecha máxima em A.

$$E = 200tf / cm^2$$



Resolução do exercício 5

Calcular os valores extremos de σ (tração e compressão) que surgirão na viga. O peso próprio é desprezado. A carga P é vertical e passa pelo cg da seção.



Dados: $I_y = 124167 \text{ cm}^4$

$$I_z = 461042 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = 194375 \text{ cm}^4$$

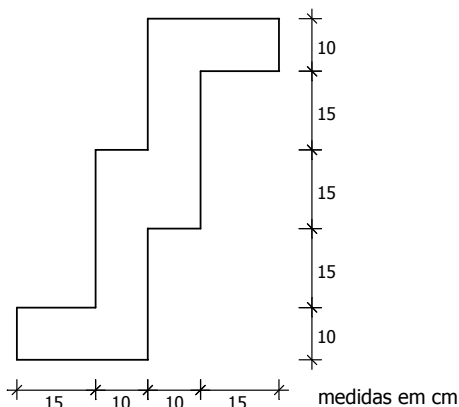


Figura 5.1

Solução:

a) *Características Geométricas*

- *Cálculo do CG*

→ *como a seção é simétrica a posição do cg é óbvia.*

- Momentos Totais de Inércia e suas Direções

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 194375}{461042 - 124167} \Rightarrow \alpha = 24,76^\circ$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 550676,20 \text{ cm}^4 \\ I_2 = 39532,80 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

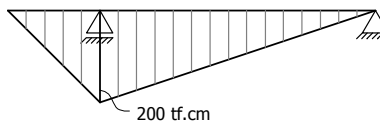
→ eixos u e v ,

$$I_u = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{yz} \cdot \sin 2\alpha \Rightarrow I_u = 39532,80 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_u = I_2$$

$$I_v = I_1$$

Diagrama de momento (M):



b) Tensões

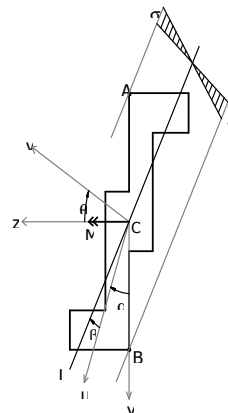
Pela regra da mão direita temos:

$$\sigma_x = -\frac{M_u}{I_u} \cdot v + \frac{M_v}{I_v} \cdot u$$

onde: $\theta = -24,76^\circ$

$$\begin{cases} M_u = M \cdot \sin \theta = -83,76 \text{ tf} \cdot \text{cm} \\ M_v = M \cdot \cos \theta = 181,61 \text{ tf} \cdot \text{cm} \end{cases}$$

$$\therefore \sigma_x = -\frac{83,76}{39532,80} \cdot v + \frac{181,61}{550676,20} \cdot u$$



- Para a Linha Neutra $\sigma = 0$

$$\sigma_x = -\frac{83,76}{39532,80} \cdot v + \frac{181,61}{550676,20} \cdot u = 0$$

→ podemos calcular a LN de duas formas:

admitindo pontos na eq. de tensão

$$\therefore u = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$v = 1 \Rightarrow u = 6,42$$

ou pelo cálculo do ângulo β :

$$v = \operatorname{tg}\beta \cdot u$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \cdot \frac{I_u}{I_v} \Rightarrow \beta = 8,85^\circ$$

Para a obtenção dos pontos mais solicitados será necessário fazer uma mudança de base, onde será utilizado a matriz de transformação:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}$$

→ ponto A:

$$\begin{cases} y_A = -32,5\text{cm} \\ z_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_A = -29,51\text{cm} \\ v_A = 13,61\text{cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_A = -\frac{83,76}{39532,80} \cdot 13,61 + \frac{181,61}{550676,20} \cdot (-29,51) = -3,86\text{tf/cm}^2$$

→ ponto B:

$$\begin{cases} y_B = 32,5\text{cm} \\ z_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_B = 29,51\text{cm} \\ v_B = -13,61\text{cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_B = -\frac{83,76}{39532,80} \cdot (-13,61) + \frac{181,61}{550676,20} \cdot 29,51 = 3,86\text{tf/cm}^2$$

$$\therefore \text{os valores extremos de } \sigma \text{ são: } \begin{cases} \sigma_C = -3,86\text{tf/cm}^2 \\ \sigma_T = 3,86\text{tf/cm}^2 \end{cases}$$

- Flexão composta: quando atua no trecho o momento e também a força axial(F).

- Flexo-compressão ($F < 0$).
- Flexo-tração ($F > 0$).
- e: excentricidade.

Quando $e = 0$: é flexo-compressão ou flexo-tração centrada. Quando não, deve-se considerar a excentricidade.

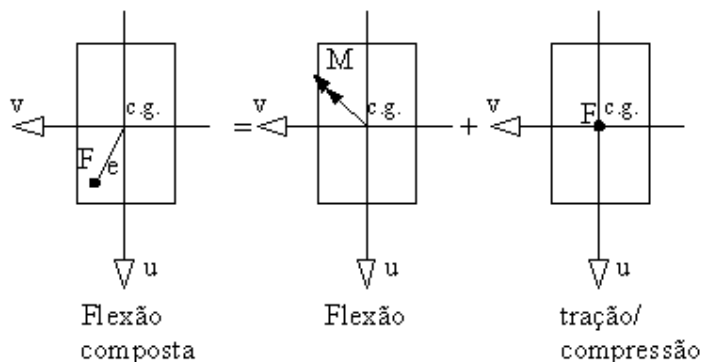
- Flexão Oblíqua Composta:

e_u : excentricidade em relação ao eixo u.

e_v : excentricidade em relação ao eixo v.

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_v}{I_v} \cdot u + \frac{M_u}{I_u} \cdot v$$

Superposição de efeitos.



Nesse caso:

$$M_u = M \cdot \sin \theta = F \cdot e \cdot \sin \theta = F \cdot e_u$$

$$M_v = M \cdot \cos \theta = F \cdot e \cdot \cos \theta = F \cdot e_v$$

Linha Neutra:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_v}{I_v} \cdot u + \frac{M_u}{I_u} \cdot v = 0 \rightarrow \frac{1}{A} + \frac{e \cdot \cos \theta}{I_v} \cdot u + \frac{e \cdot \sin \theta}{I_u} \cdot v = 0$$

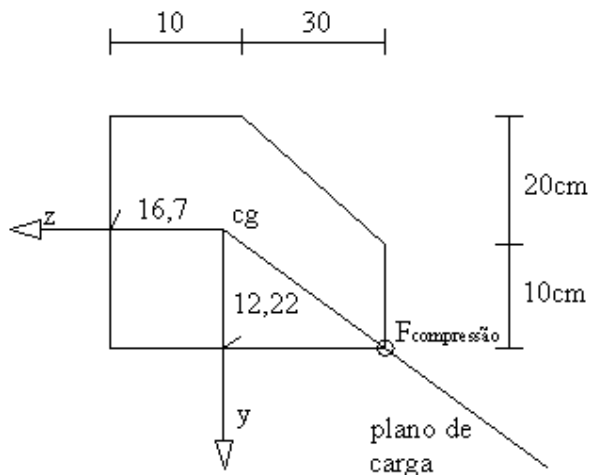
$$v = -\frac{I_u}{A \cdot e \cdot \sin \theta} + \operatorname{tg} \beta \cdot u$$

$$v = cte + \operatorname{tg} \beta \cdot u \rightarrow cte \neq 0 \rightarrow \text{a linha neutra não passa pelo c.g.}$$

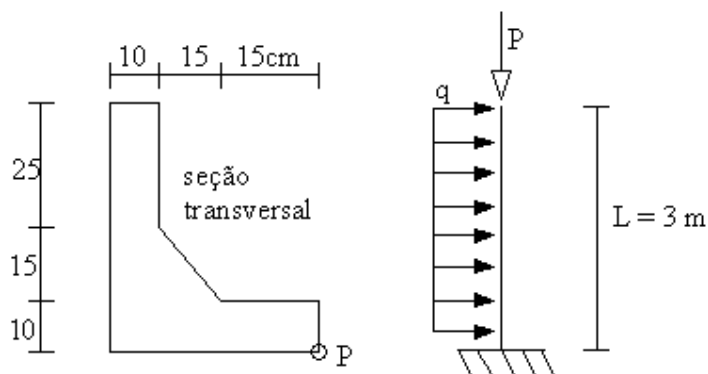
Exercícios:

8) Calcular F, sendo $\bar{\sigma}_c = 800 \text{kgf/cm}^2$ e $\bar{\sigma}_t = 1400 \text{kgf/cm}^2$.

Dados: $I_y = 105.000 \text{cm}^4$, $I_z = 55.577,73 \text{cm}^4$, $I_{yz} = -28.320 \text{cm}^4$, $A = 900 \text{cm}^2$

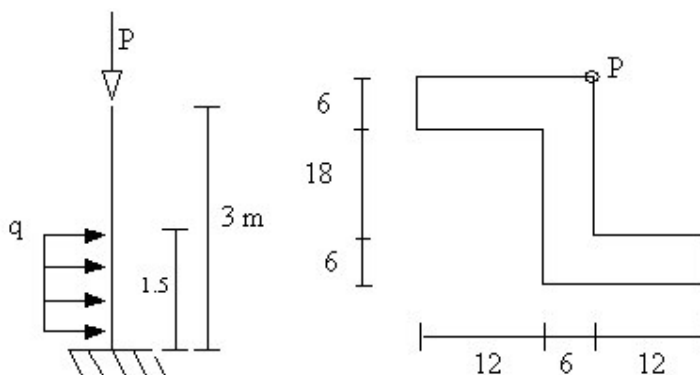


9) Determinar a carga admissível P sabendo que $\bar{\sigma}_c = 120 \text{kgf/cm}^2$; $\bar{\sigma}_t = 30 \text{kgf/cm}^2$ e que $q = P/\ell$. Dados: $I_y = 103.689,36 \text{cm}^4$, $I_z = 183.689,36 \text{cm}^4$, $I_{yz} = -76.319,57 \text{cm}^4$.

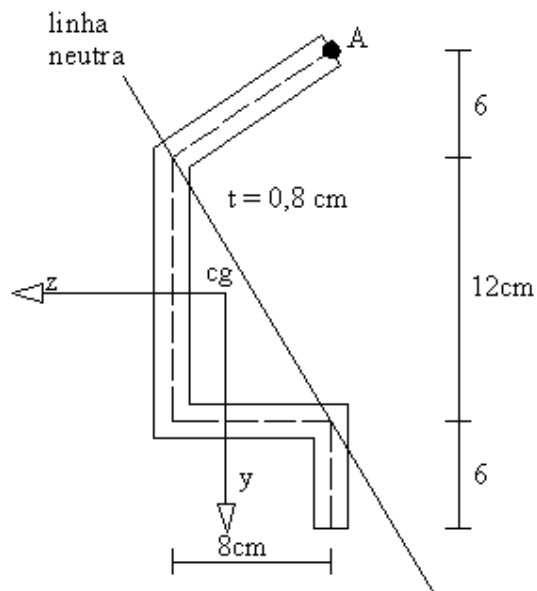


10) Traçar o diagrama de tensões normais na situação mais crítica. Dados:

$$I_y = 13932\text{cm}^4, I_z = 34668\text{cm}^4, I_{yz} = -15552\text{cm}^4, P = 10\text{KN}, q = 5\text{KN/m}.$$



11) Determinar a posição e o valor de uma carga P de tração que provoca a linha neutra indicada na figura abaixo. A tensão no ponto A vale $\sigma_A = 100\text{kgf/cm}^2$.



Núcleo central de Figuras Planas

- **Definição:** região da seção transversal onde aplicada uma força normal, sua linha neutra não corta a seção.
- **Conseqüência:** a seção só terá tensões de um mesmo sinal (compressão ou tração) de acordo com o sinal da força.
- **Importância:** materiais com baixa resistência a tração.
Exemplos: muros de arrimo, chaminés e pilares.

Determinação do núcleo central:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_v}{I_v} \cdot u \rightarrow \text{com } M_v = N \cdot e_v \rightarrow \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_v}{I_v} \cdot u$$

Linha neutra:

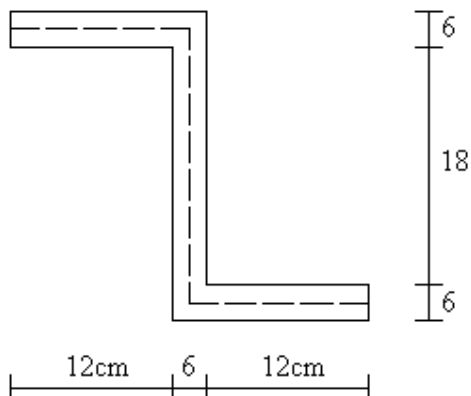
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_v}{I_v} \cdot u = 0 \rightarrow \frac{1}{A} + \frac{e_v}{I_v} \cdot u = 0 \rightarrow u = -\frac{I_v}{A \cdot e_v}$$

Observação:

1. Cada figura plana tem seu núcleo central que não depende de N.
2. A cada par de lados consecutivos do polígono circunscrito corresponderá a um lado do polígono que constitui o núcleo central.
3. O ponto de aplicação de N e a LN conseqüente ficam em semi-planos opostos delimitados pelos eixos centrais (antipolos da LN).
4. O núcleo central terá tantos lados quantos forem os lados (ou vértices) do polígono convexo circunscrito.

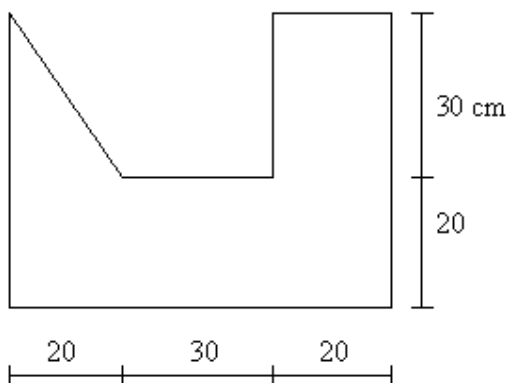
Exercícios:

12) Traçar o núcleo central para a seção da figura abaixo.



13) Traçar o núcleo central para a seção da figura abaixo.

Dados: $A = 2300\text{cm}^2$, $I_u = 1220171,54\text{cm}^4$, $I_v = 385504,15\text{cm}^4$, $\alpha = -9,85^\circ$



2-Torção

Torção em barras de seção circular

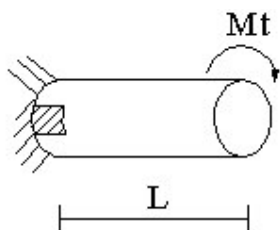


Figura a

Seja uma barra de seção circular engastada numa extremidade e solicitada na extremidade livre por um momento torsor M_t (figura a). No engastamento, surgirá um momento de mesmo valor com sentido oposto.

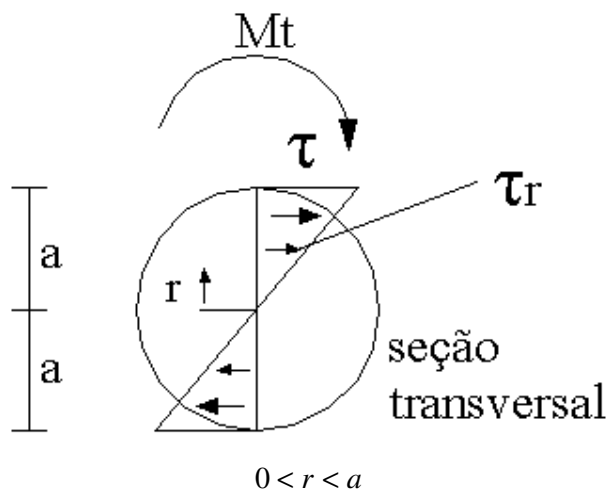
Na deformação elástica, cada seção da barra terá uma rotação γ (ângulo de torção). Aparecerá, assim, em cada seção da barra, tensões de cisalhamento τ .

Hipóteses básicas:

1. As tensões de cisalhamento estão dirigidas perpendicularmente ao raio e seus valores são proporcionais ao mesmo.

$$\tau(r) = f(r)$$

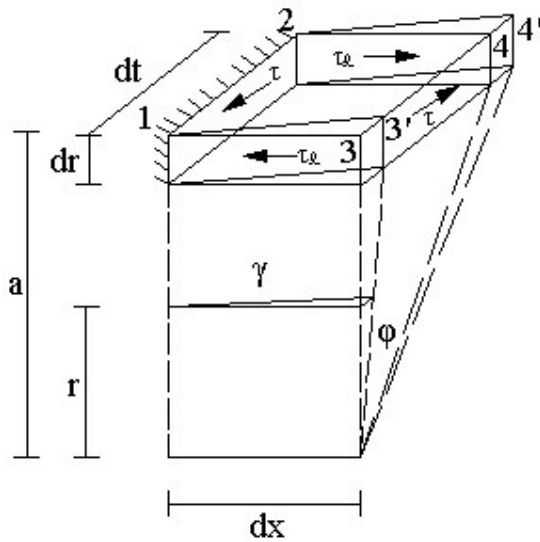
$$\tau_r = \frac{r}{a} \cdot \tau$$



γ : distorção e M_t : momento de torção.

2. As seções executam rotações elásticas como se fossem corpos rígidos.

Seja:

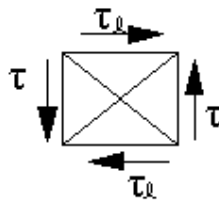


A tensão aplicada na face 34 dr e a mesma tensão (reativa) na face oposta 12 dr são insuficientes para equilibrar o elemento porque as duas forças provocadas por elas formam um binário (τ). Assim, devem existir tensões longitudinais de cisalhamento (τ_l).

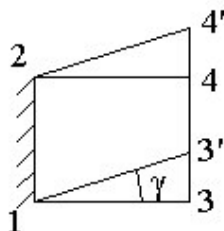
O Teorema de CAUCHY diz que as tensões em planos perpendiculares são iguais.

$$\tau \cdot dr \cdot dt \cdot dx = \tau_l \cdot dx \cdot dr \cdot dt$$

$$\therefore \tau = \tau_l$$

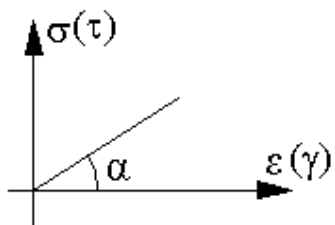


Tensões de cisalhamento – Lei de Hooke



Após a aplicação de M_t , os pontos 3 e 4 passarão a ocupar as posições 3' e 4' devido a distorção γ .

Na flexão, a tensão normal é: $\sigma = E \cdot \varepsilon$.



Analogamente, na torção, a tensão de cisalhamento será: $\tau = G \cdot \gamma$, onde G é o módulo de elasticidade transversal. Para materiais isotrópicos:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad \nu : \text{coeficiente de Poisson}$$

Para o Aço:

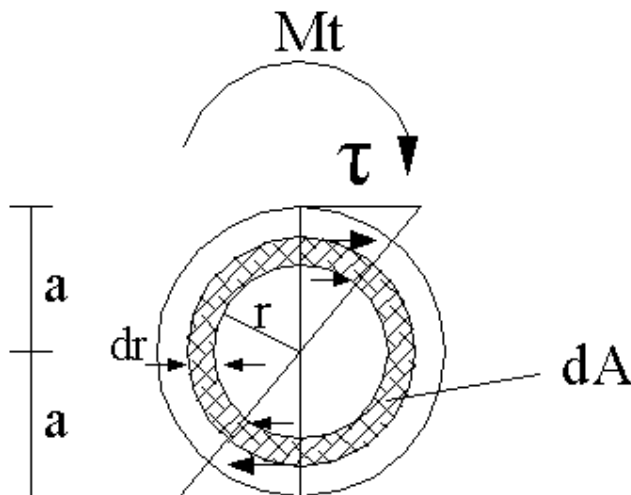
$$E = 2100000 \text{Kgf} / \text{cm}^2 = 210000 \text{MPa}$$

$$G = 800000 \text{Kgf} / \text{cm}^2 = 80000 \text{MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\text{Se } \tau_r = \frac{r}{a} \cdot \tau \rightarrow G \cdot \gamma_r = \frac{r}{a} \cdot G \cdot \gamma \rightarrow \gamma_r = \frac{r}{a} \cdot \gamma.$$

Obtém-se o momento torsor M_t , calculando-se o momento resultante das forças elementares aplicadas na seção. Em um anel circular (conforme figura abaixo) de espessura ∂r , o momento ∂M_t é dado pela resultante das tensões τ na área elementar ∂A .



Sendo $\partial M_t = \tau_r \cdot \partial A \cdot r$ e $\partial A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \partial r$, tem-se:

$$\partial M_t = \frac{r}{a} \cdot \tau \cdot 2\pi \cdot r \cdot r \cdot \partial r$$

$$\partial M_t = \frac{\tau \cdot 2\pi \cdot r^3 \cdot \partial r}{a}$$

$$M_t = \int \partial M_t = \int_0^a \frac{\tau \cdot 2\pi \cdot r^3 \cdot \partial r}{a} = \left(\frac{2\pi \cdot \tau \cdot r^4}{4 \cdot a} \right)_0^a = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot \tau}{2}$$

$$\tau = \frac{2 \cdot M_t}{\pi \cdot a^3}$$

$$a = \frac{D}{2} \text{ (D = diâmetro)}$$

$$\text{Portanto, } \tau = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3}.$$

Flexão:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y = \frac{M}{I/y} = \frac{M}{W}$$

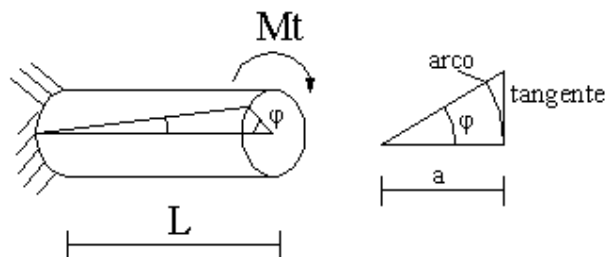
W: módulo de resistência à flexão.

Torção:

$$\tau = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} = \frac{M_t}{\left(\frac{\pi \cdot D^3}{16} \right)} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \text{ para seção circular cheia}$$

Giro Relativo (φ)



Hipótese: (Teoria de pequenos deslocamentos)

$\partial\varphi$ é muito pequeno \rightarrow arco \approx tangente

tangente = $\partial\varphi \cdot a = \gamma \cdot \partial x$ (γ é muito pequeno)

$$\therefore \partial\varphi = \frac{\gamma \cdot \partial x}{a}$$

A variação do ângulo está relacionada à distorção do raio e do cisalhamento.

$$\varphi = \int_0^\ell \partial\varphi = \int_0^\ell \frac{\gamma}{a} \cdot \partial x$$

$$\therefore \varphi = \frac{\gamma \cdot \ell}{a}$$

$$\text{Sendo } \gamma = \frac{\tau}{G} \rightarrow \varphi = \frac{\tau \cdot \ell}{G \cdot a} \rightarrow \varphi = \frac{16 \cdot M_t \cdot \ell}{\pi \cdot D^3 \cdot G \cdot \frac{D}{2}}$$

$$\therefore \varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot \ell}{G \cdot \pi \cdot D^4}$$

$$\therefore \varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^4}{32}\right)}$$

$$\text{Ou } \varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_t} \text{ com } I_t = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

Resumindo: **seção circular cheia.**

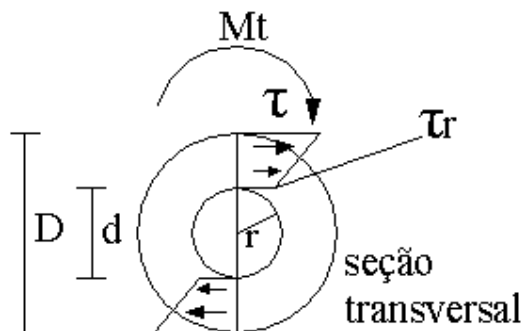
$$\tau = \frac{M_t}{W_t}$$

$$W_t = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_t}$$

$$I_t = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

SEÇÃO CIRCULAR DE PAREDE ESPESSA (GROSSA)



Com as expressões obtidas anteriormente e $a = D/2$, tem-se:

$$\frac{\tau_r}{\tau} = \frac{r}{D/2} \rightarrow \tau_r = \frac{r}{D/2} \cdot \tau$$

$$\partial A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$\partial M_t = \tau_r \cdot \partial A \cdot r$$

$$\partial M_t = \tau_r \cdot 2\pi \cdot r \cdot \partial r \cdot r$$

$$\partial M_t = \tau_r \cdot 2\pi \cdot r^2 \cdot \partial r$$

$$\partial M_t = \frac{\tau}{\left(\frac{D}{2}\right)} \cdot 2\pi \cdot r^3 \cdot \partial r$$

$$\partial M_t = \int_{d/2}^{D/2} \partial M_t = \int_{d/2}^{D/2} \frac{\tau}{\left(\frac{D}{2}\right)} \cdot 2\pi \cdot r^3 \cdot \partial r$$

$$\text{Momento resultante: } M_t = \frac{2\pi \cdot \tau}{\frac{D}{2} \cdot 4} \cdot \left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4 \right]$$

$$\text{Assim, a tensão será } \tau = \frac{M_t}{W_t} \text{ com } W_t = \frac{\pi}{D} \left[\left(\frac{D}{2}\right)^4 - \left(\frac{d}{2}\right)^4 \right]$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_t}$$

$$I_t = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

SEÇÃO CIRCULAR DE PAREDE FINA (DELGADA)

Nas quais $t \lll dm$ ou $\frac{dm}{t} > 10$, onde:

dm: diâmetro médio;

t: espessura.

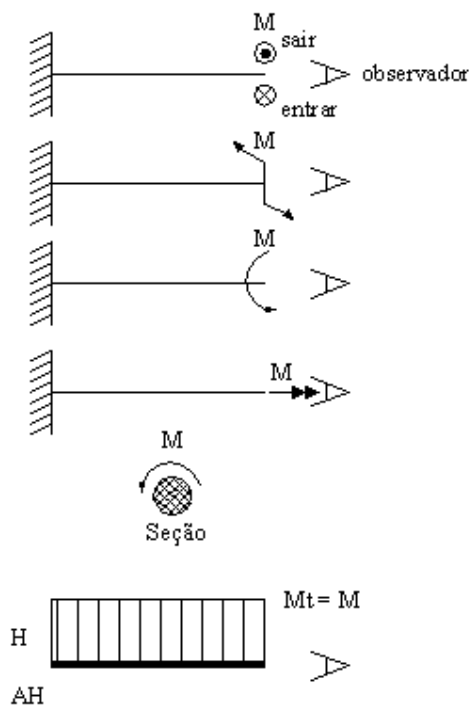
Pode-se considerar que τ seja uniforme.

$$\tau \cdot A \cdot \frac{dm}{2} = M_t \rightarrow \tau \cdot \pi \cdot dm \cdot t \cdot \frac{dm}{2} = M_t \rightarrow \frac{\tau \cdot \pi \cdot dm^2 \cdot t}{2} = M_t \rightarrow \tau = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot t \cdot dm^2}{2}}$$

$$\text{Assim } \tau = \frac{M_t}{W_t} \text{ com } W_t = \frac{\pi \cdot t \cdot dm^2}{2}. \text{ E } \varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_t} \text{ com } I_t = \frac{\pi \cdot t \cdot dm^3}{4}.$$

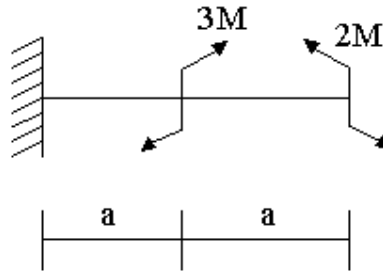
Exemplo de Diagramas de Momento Torsor

- Momento de torção aplicado

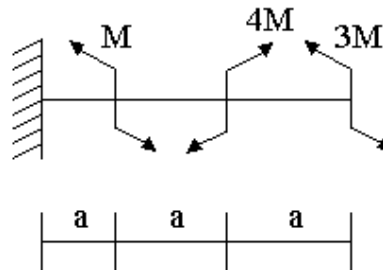


Exercícios:

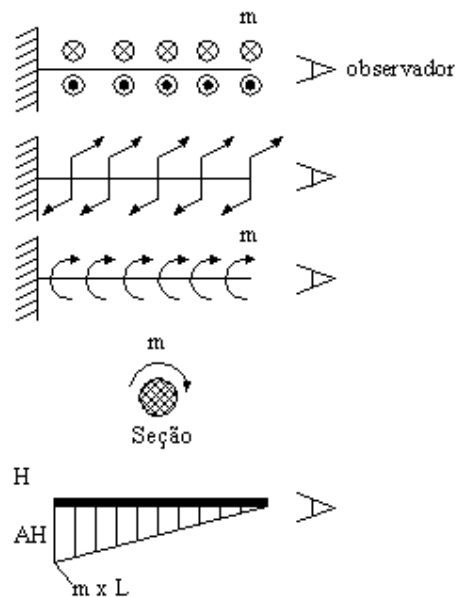
1) Traçar o diagrama de momento torsor



2) Traçar o diagrama de momento torsor

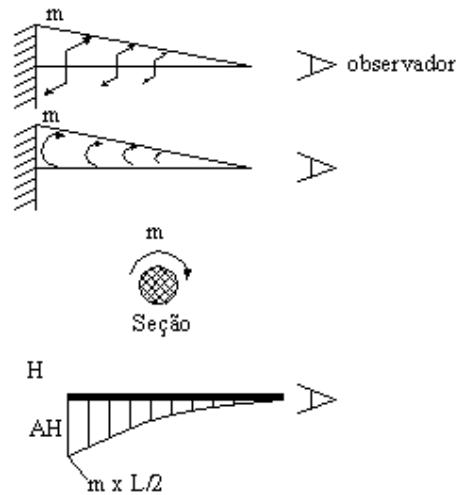


• **Momento de torção uniformemente distribuído (m)**



$$M_t = \int_0^x m \cdot dx = m \cdot x \rightarrow M_t(x = \ell) = m \cdot \ell$$

• **Momento de torção linearmente distribuído (m)**



$$M_t = \int_0^x m_x \partial x \quad \text{onde} \quad m_x = \text{tg} \theta = \frac{m}{\ell} \cdot x$$

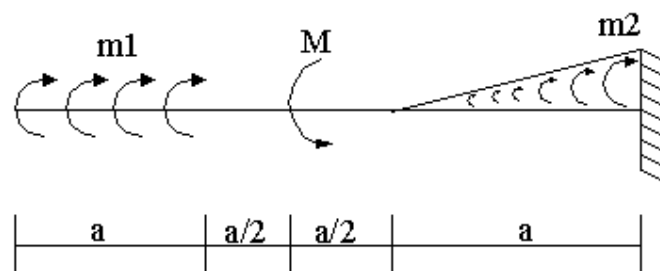
$$M_t = \int_0^x \frac{m}{\ell} \cdot x \cdot \partial x$$

$$\text{Logo: } M_t = \frac{m \cdot x^2}{2 \cdot \ell} \quad \text{e} \quad M_t(x = \ell) = \frac{m \cdot \ell^2}{2 \cdot \ell} = \frac{m \cdot \ell}{2}$$

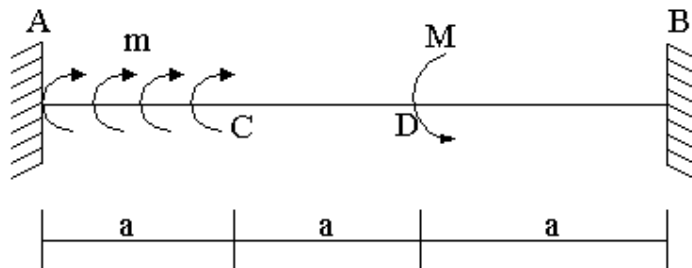
Exercícios:

1) Traçar o diagrama de momento torsor para a estrutura isostática. $m_1 = M/2a$,

$$m_2 = M/a$$

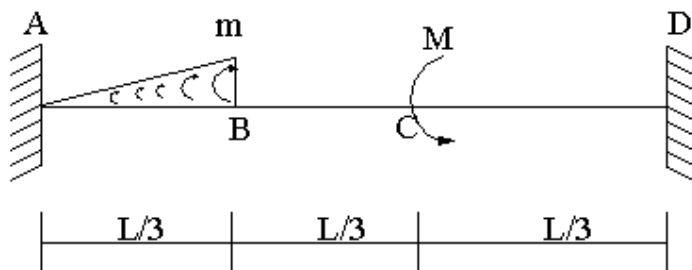


2) Traçar o diagrama de momento torsor para a estrutura hiperestática. $m = M/a$

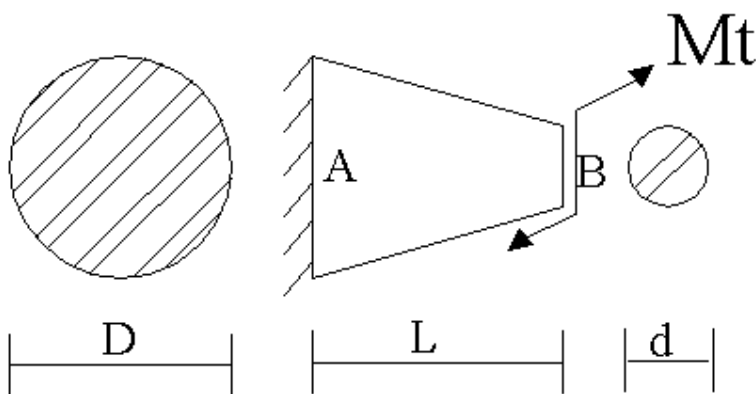


3) Traçar o diagrama de momento torsor para a estrutura hiperestática.

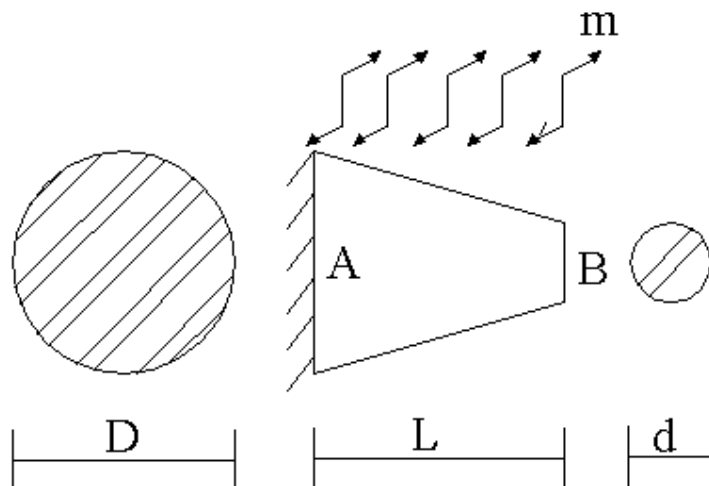
$M = 5 \text{ kNm}$; $m = 0,3 \text{ kNm/m}$; $L = 1,2 \text{ m}$.



4) Calcular o giro relativo φ_{ab}

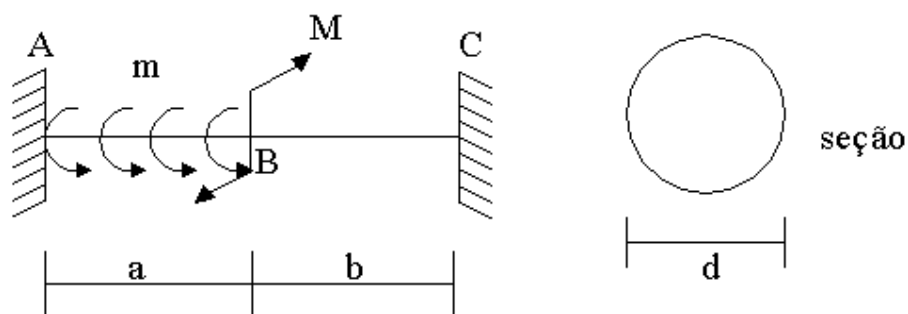


5) Calcular o giro relativo φ_{ab}



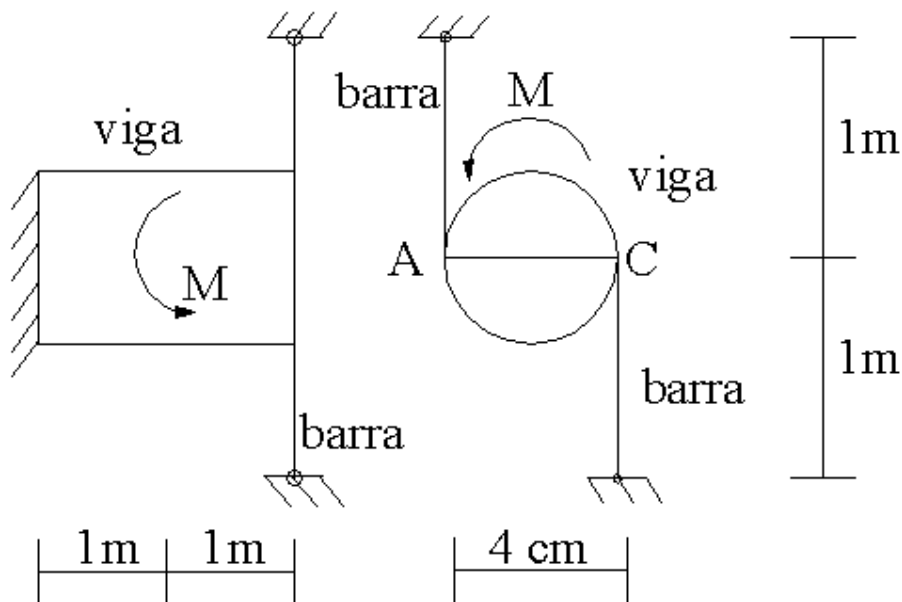
6) Calcular o diâmetro d e o giro φ_{ab}

$M = 120 \text{ Nm}$; $m = 40 \text{ Nm/m}$; $a = 1,2 \text{ m}$; $b = 0,8 \text{ m}$; $\tau_{adm} = 10 \text{ MN} / \text{m}^2$, $G = 80000 \text{ MN/m}^2$.



7) Calcular o momento torsor M .

$E = 21000 \text{ kN/cm}^2$; $G = 7000 \text{ kN/cm}^2$; $\phi_{\text{barra}} = 1 \text{ cm}$; $\sigma_{\text{adm}} = 12 \text{ kN/cm}^2$ $\tau_{\text{adm}} = 8 \text{ kN/cm}^2$

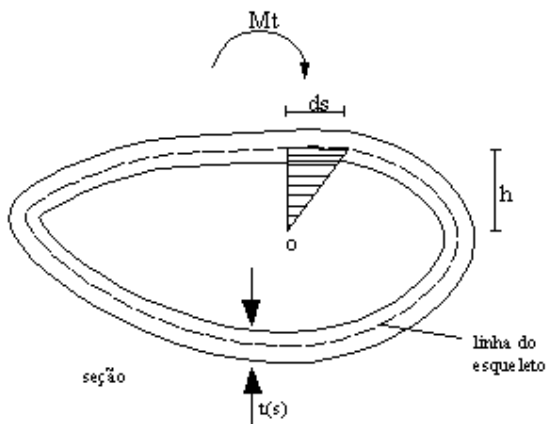


Torção em barras de seção qualquer

Observações:

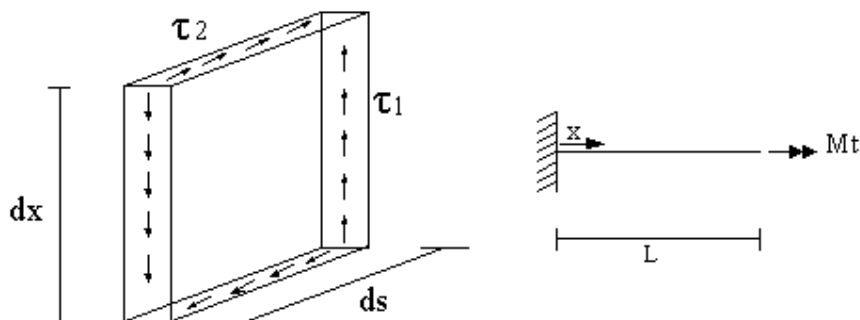
Barras de seção circular: seções sofrem rotações elásticas e permanecem planas.

Barras de seção qualquer: sofrem empenamento.



Hipóteses:

1. A espessura $t = t(s)$, pode variar com s , mas é constante em x .
2. As tensões de cisalhamento igualmente distribuídas sobre a espessura t e dirigindo-se paralelas às bordas são funções de s , $\tau = \tau(s)$, mas independentes de x .



obs: considerando-se o empenamento nulo tem-se a torção livre (torção de Saint Venant)

Equilíbrio de forças:

$$\tau_1 \cdot t_1 \cdot \partial x = \tau_2 \cdot t_2 \cdot \partial x$$

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau(s) \cdot t(s) = cte$$

$$\tau(s) \cdot t(s) = \text{fluxo de cisalhamento}$$

Momento M_t :

$$\partial M_t = \tau(s) \cdot t(s) \cdot ds \cdot h \quad \text{com}$$

$$\partial A = \frac{ds \cdot h}{2} \Rightarrow h \cdot ds = 2 \cdot dA$$

$$\partial M_t = \tau(s) \cdot t(s) \cdot 2 \cdot dA$$

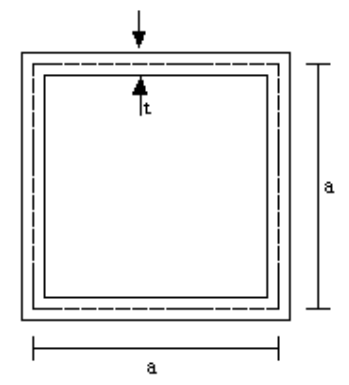
$$M_t = \int_A \partial M_t = \int_A \tau(s) \cdot t(s) \cdot 2 \cdot dA$$

$$\therefore M_t = 2 \cdot \tau(s) \cdot t(s) \cdot A$$

$$\therefore \tau(s) = \frac{M_t}{2 \cdot A \cdot t(s)}$$

$$\therefore \tau(s) = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{com } W_t = 2 \cdot A \cdot t(s)$$

Exemplo: Seção quadrada:

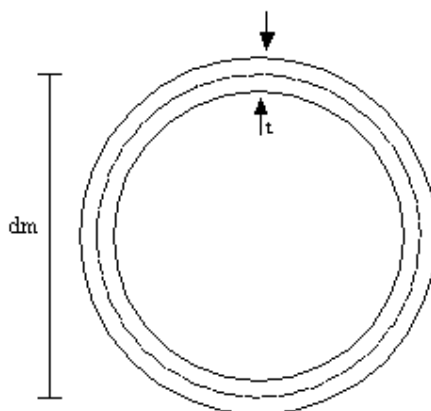


$$A = a^2$$

$$t(s) = t$$

$$W_t = 2 \cdot a^2 \cdot t$$

Exemplo: círculo



$$A = \frac{\pi \cdot dm^2}{4}$$

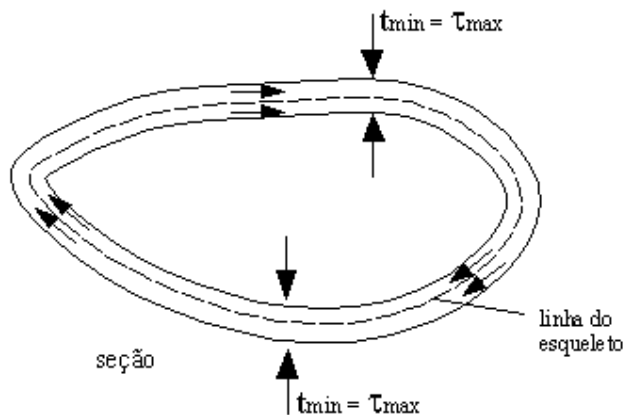
$$W_t = \frac{\pi \cdot t \cdot dm^2}{2}$$

Na seção qualquer, se $t = t(s)$:

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{e} \quad W_t = 2 \cdot A \cdot t(s)$$

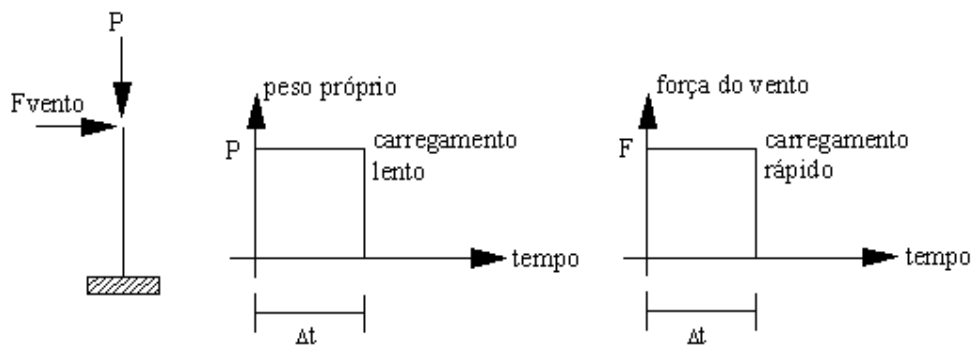
$$\tau_{MAX} = \frac{M_t}{W_t \min} \rightarrow W_t \min = 2 \cdot A \cdot t \min$$

Fluxo de cisalhamento $\rightarrow \tau(s) \cdot t(s) = cte$



Deformação φ (rotação elástica)

- Trabalho/energia



$U = \text{energia} = T = \text{trabalho}$

$$U_p = \frac{p \cdot d}{2}$$

$$U_{FV} = F \cdot d$$

$$T = U = \frac{1}{2} \cdot M_i \cdot \varphi \text{ (carregamento lento)}$$

Se $T = M_i \cdot \varphi$ (cargas rápidas)

U: energia de deformação (interna)

T: trabalho externo

A carga (F,M) produz esforços (M,V,N,Mt) e tensões (σ, τ).

$$\partial U = \frac{1}{2} \cdot \tau(s) \cdot t(s) \cdot dx \cdot \gamma \cdot ds$$

Pela Lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \tau = G \cdot \gamma \qquad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\text{Logo } \partial U = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \tau(s)^2 \cdot t(s) \cdot dx \cdot ds .$$

$$\text{Tem-se: } \tau(s) = \frac{M_t}{2 \cdot A \cdot t(s)} .$$

$$\partial U = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left(\frac{M_t}{2 \cdot A \cdot t(s)} \right)^2 \cdot t(s) \cdot dx \cdot ds$$

$$\partial U = \frac{M_t^2}{8 \cdot G \cdot A^2 \cdot t(s)} \cdot dx \cdot ds$$

$$\partial U = \frac{M_t^2}{8 \cdot G \cdot A^2} \cdot dx \cdot \frac{ds}{t(s)}$$

$$U = \int \partial U = \frac{M_t^2}{8 \cdot G \cdot A^2} \cdot \int_0^l dx \cdot \oint \frac{ds}{t(s)}$$

Igualando-se o trabalho do esforço M_t com o das tensões τ , tem-se:

$$U = T$$

$$\frac{M_t^2 \cdot \ell}{8 \cdot G \cdot A^2} \cdot \oint \frac{ds}{t(s)} = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \varphi$$

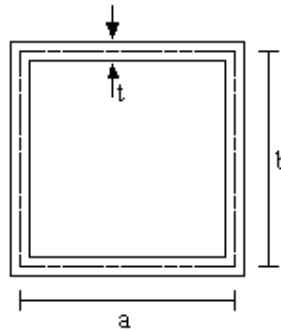
$$\varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{4 \cdot G \cdot A^2} \cdot \oint \frac{ds}{t(s)}$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_T}$$

$$\therefore I_T = \frac{4 \cdot A^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}$$

como t é normalmente constante, $\oint ds =$ perímetro.

Exemplo:



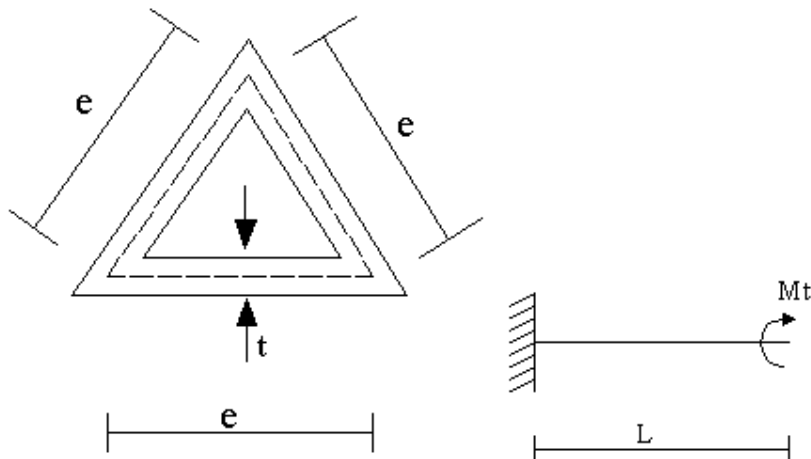
$$A = a \times b$$

$$I_t = \frac{4 \cdot A^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4 \cdot (a \cdot b)^2}{\frac{2 \cdot (a+b)}{t}} = \frac{2 \cdot (a \cdot b)^2 \cdot t}{(a+b)}$$

Exercícios:

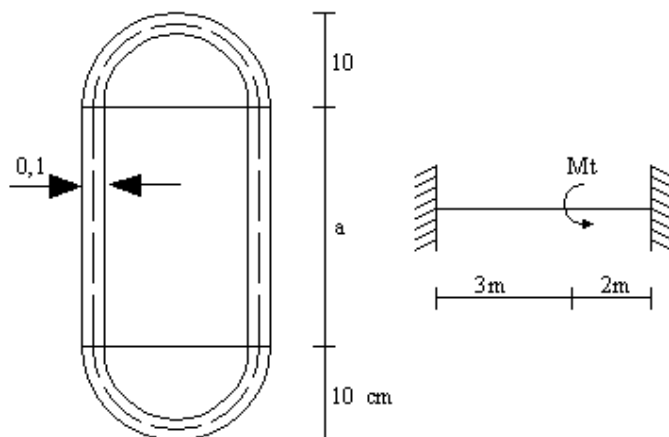
1) Calcular “e”, I_t .

Dados: $Mt = 100 \text{ t fcm}$, $t = 0,1 \text{ cm}$, $\tau_{adm} = 1,0 \text{ tf / cm}^2$



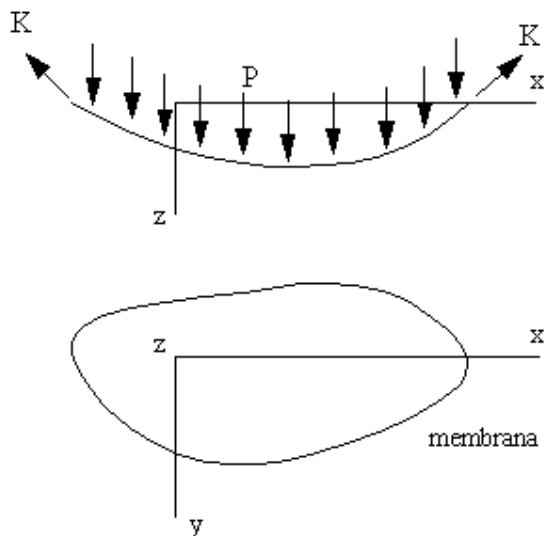
2) Calcular “a”

Dados: $M_t = 250 \text{ tcm}$, $\tau_{adm} = 1,0 \text{ tf/cm}^2$



Analogia de membrana

Imaginemos uma membrana homogênea, com o mesmo contorno da seção transversal do elemento sujeito à torção e solicitada por uma tração uniforme nas bordas e por pressão uniforme.



Equação diferencial da superfície deformada de uma membrana.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{K}$$

Mostra-se que a equação diferencial da superfície elástica da membrana deformada tem a mesma forma da equação diferencial que determina a distribuição das tensões ao longo da barra solicitada à torção.

Equação diferencial da torção:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -G \cdot \alpha$$

Analogia entre as equações diferenciais se: $\frac{P}{K} = G \cdot \alpha$ onde:

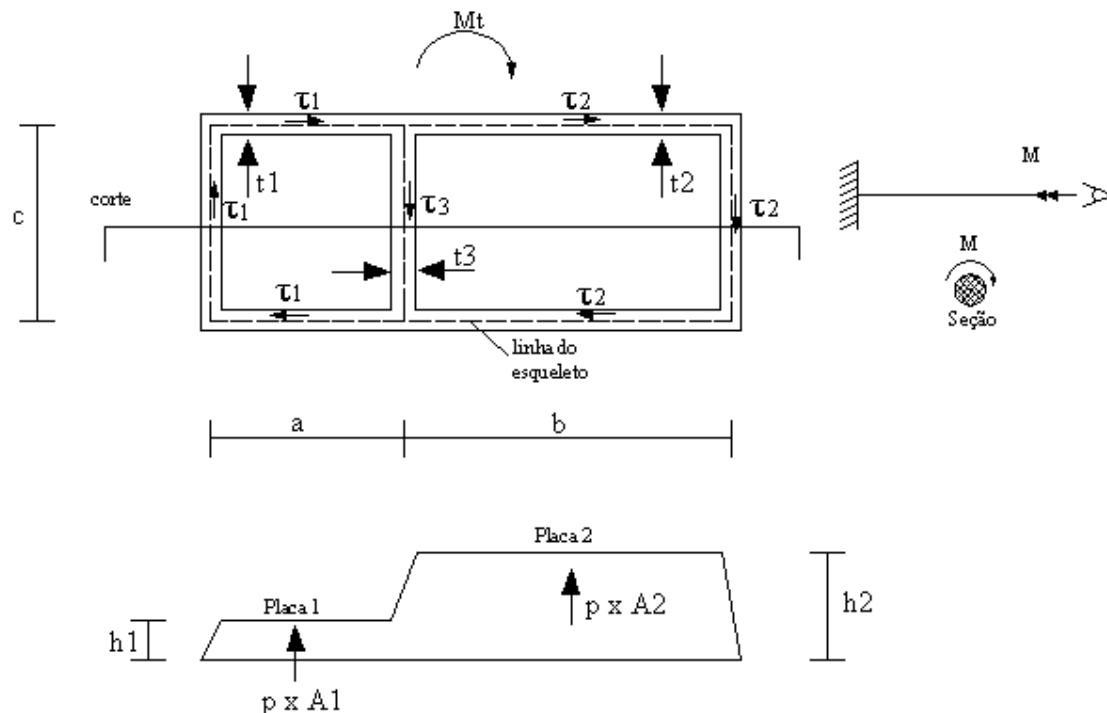
P: pressão lateral por unidade de área;

K: força de tração por unidade de comprimento da barra;

α : ângulo de torção por unidade de comprimento.

Seções celulares:

Torção em seções celulares:



Equação de equilíbrio da membrana:

$$p \cdot A = K \cdot h \cdot \oint \frac{ds}{t}$$

Placa 1:

$$p \cdot A_1 = \frac{K \cdot h_1}{e_1} \cdot (a + c + a) - \frac{K}{e_3} \cdot (h_2 - h_1) \cdot (c)$$

Placa 2:

$$p \cdot A_2 = \frac{K \cdot h_2}{e_2} \cdot (b + c + b) + \frac{K}{e_3} \cdot (h_2 - h_1) \cdot (c)$$

Tensão tangencial:

$$\tau = \frac{M_t}{2 \cdot V} \cdot \beta$$

$$\beta = \frac{h}{e}$$

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2 \cdot V} \cdot \beta_1$$

$$\beta_1 = \frac{h_1}{e_1}$$

$$\tau_2 = \frac{M_t}{2 \cdot V} \cdot \beta_2$$

$$\beta_2 = \frac{h_2}{e_2}$$

$$\tau_3 = \frac{M_t}{2 \cdot V} \cdot \beta_3$$

$$\beta_3 = \frac{h_2 - h_1}{e_3}$$

Momento de inércia à torção:

$$I_T = \frac{4 \cdot V \cdot K}{p}$$

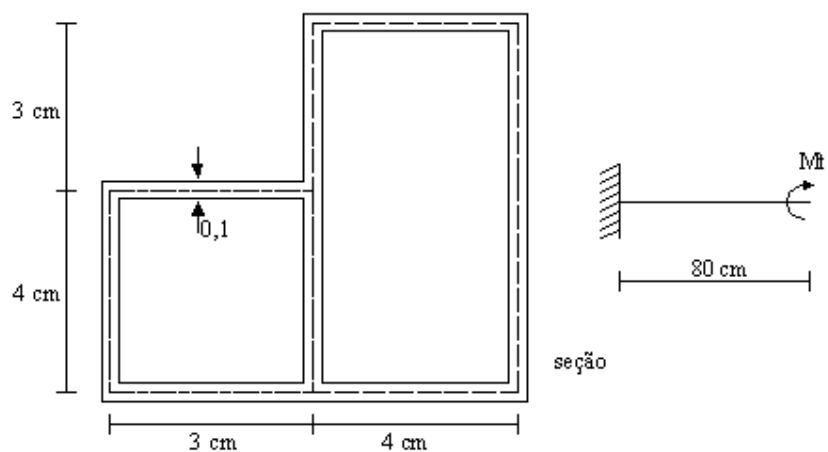
ângulo de giro:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_T} = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot 4 \cdot V} \cdot \frac{p}{K}$$

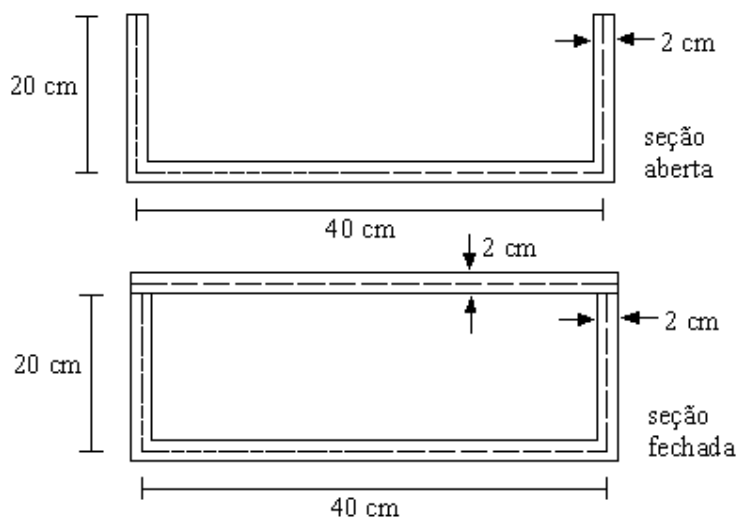
Exercícios:

1) Calcular M_t e φ_{ab}

Dados: $G = 800 \text{ kN/cm}^2$; $\tau_{adm} = 8 \text{ kN/cm}^2$



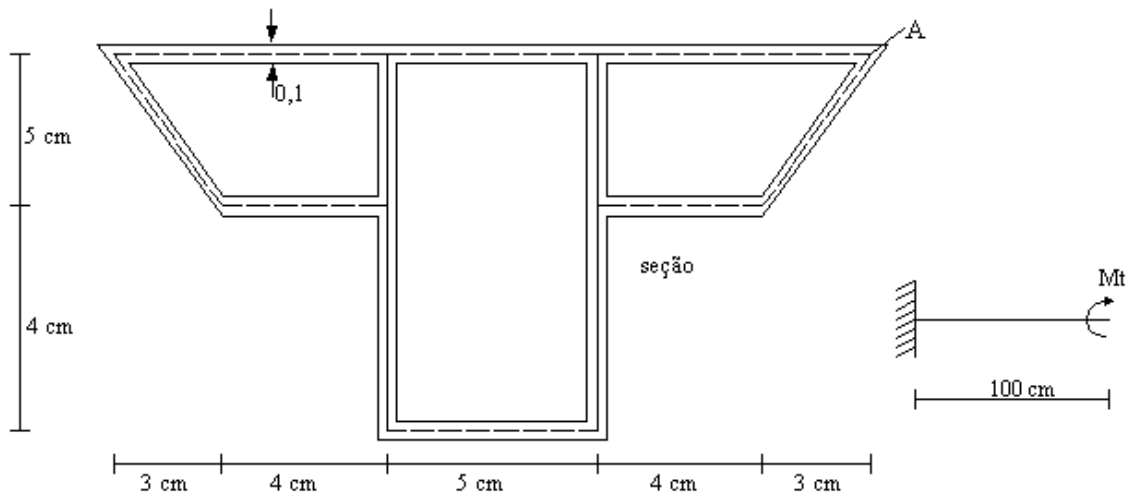
2) Determinar: a) W_{ta} / W_{tf} , b) esforço no cordão de solda, sendo $M_t = 100 \text{ tcm}$.



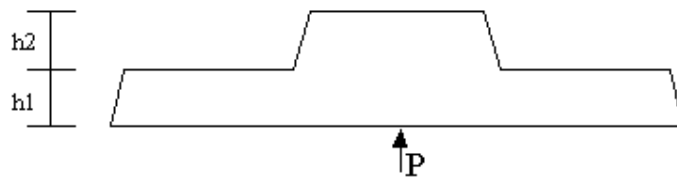
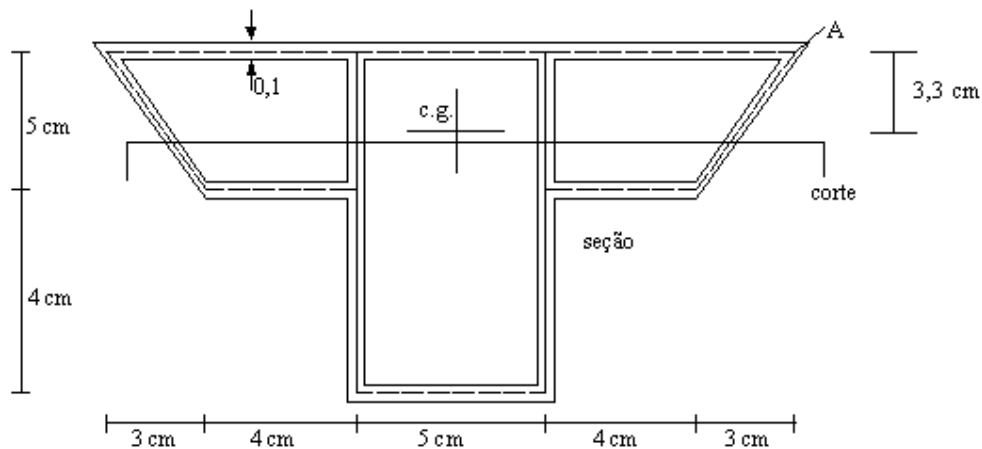
3) Calcular o deslocamento do ponto A.

Dados: $t = 0,1 \text{ cm}$; $Mt = 1$

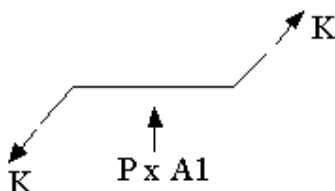
50 kNcm , $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$.



Resolução do exercício 3.

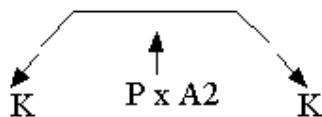


Placa 1 = Placa 3



$$p \cdot \left(\frac{(4+7)}{2} \cdot 5 \right) = \frac{K}{0,1} \cdot h_1 \cdot (5,83 + 7 + 4) - \frac{K}{0,1} \cdot h_2 \cdot (5) \rightarrow 2,75 \cdot \frac{p}{K} = 16,83 \cdot h_1 - 5 \cdot h_2$$

Placa 2



$$p \cdot (5 \cdot 9) = \frac{K}{0,1} \cdot h_2 \cdot (5 + 5) + \frac{K}{0,1} \cdot (h_1 + h_2) \cdot (4 + 4 + 5 + 5) \rightarrow 4,5 \cdot \frac{p}{K} = 18 \cdot h_1 + 28 \cdot h_2$$

$$h_1 = 0,18 \cdot \frac{p}{K}$$

$$h_2 = 0,05 \cdot \frac{p}{K}$$

Volume: $V = 2 \cdot (A_1 \cdot h_1) + A_2 \cdot (h_1 + h_2)$

$$V = 2 \cdot \left(27,5 \cdot 0,18 \cdot \frac{p}{K} \right) + 45 \cdot (0,18 + 0,05) \cdot \frac{p}{K} = 20,25 \cdot \frac{p}{K}$$

Inércia à torção: $I_t = \frac{4 \cdot V \cdot K}{p} = 4 \cdot 20,25 \cdot \frac{p}{K} \cdot \frac{K}{p} = 81 \text{cm}^4$

Giro: $\varphi = \frac{M_t \cdot \ell}{G \cdot I_t} = \frac{150 \cdot 100}{8000 \cdot 81} = 0,023 \text{rad}$

Coordenadas do ponto A em relação ao c.g.

$$x_A = 9,5 \text{cm}, y_A = 3,3 \text{cm}$$

$$v_x = -\varphi \cdot y_A = -(-0,023) \cdot 3,3 = 0,076 \text{cm}$$

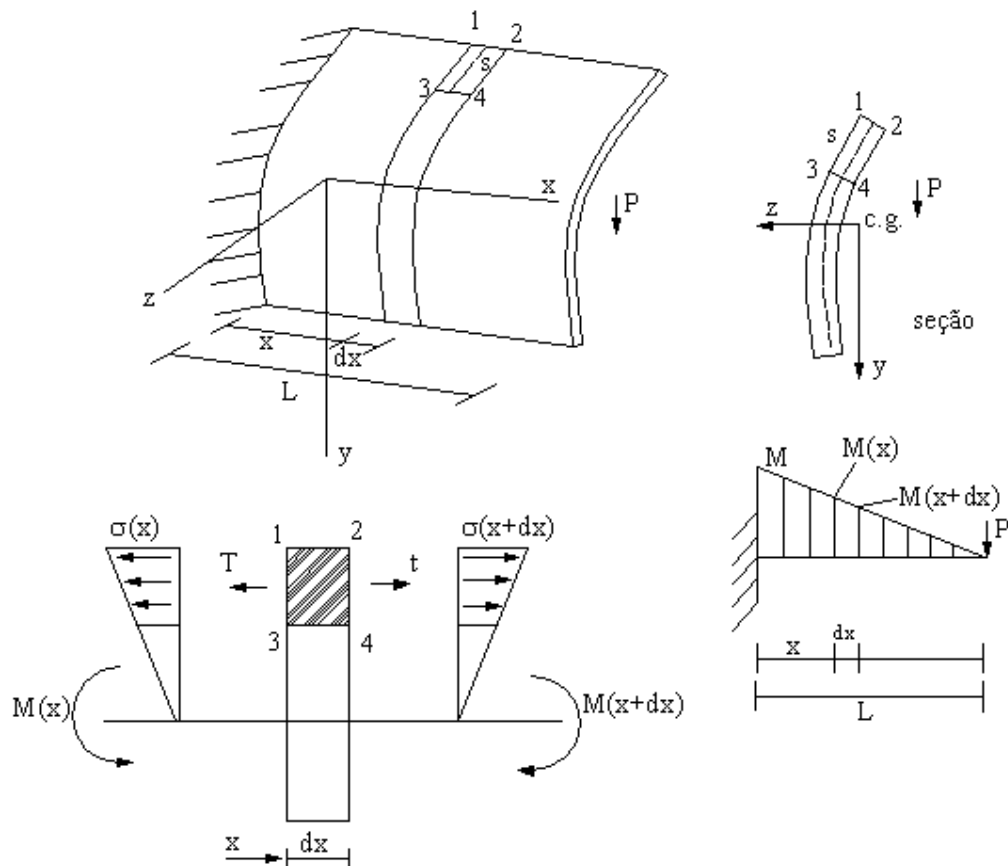
$$v_y = \varphi \cdot x_A = (-0,023) \cdot 9,5 = -0,219 \text{cm}$$

Deslocamento: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 0,23 \text{cm}$

3-CENTRO DE CISALHAMENTO EM SEÇÕES SIMÉTRICAS

- Tensões tangenciais nas seções delgadas abertas:

Dado um elemento de viga obtido por duas seções: x e $x + dx$



- $T = \int_A \sigma(x) \cdot \partial A = \int_A \frac{M(x)}{I_z} \cdot y \cdot \partial A$
- $t = \int_A \sigma(x + \partial x) \cdot \partial A = \int_A \frac{M(x + \partial x)}{I_z} \cdot y \cdot \partial A$

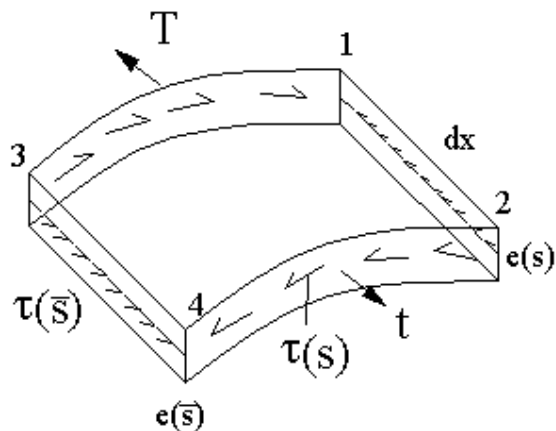
As resultantes das trações exercidas sobre o elemento geralmente não serão iguais: $T \neq t \rightarrow M(x) > M(x + \partial x) \Rightarrow T > t$

$$T - t > 0$$

$$\int_A \frac{M(x)}{I_z} \cdot y \cdot \partial A - \int_A \frac{M(x + \partial x)}{I_z} \cdot y \cdot \partial A > 0$$

$$M(x + \partial x) = M(x) - \partial M(x)$$

$$\int_A \frac{\partial M(x)}{I_z} \cdot y \cdot \partial A > 0$$



O equilíbrio exige, então, que exista uma força horizontal, que será:

$$T - t = \tau(s) \cdot e(s) \cdot \partial x$$

$$\int_A \frac{\partial M(x)}{I_z} \cdot y \cdot \partial A = \tau(s) \cdot e(s) \cdot \partial x$$

$$\therefore \tau(s) = \int_A \frac{\partial M(x) \cdot y}{\partial x \cdot I_z \cdot e(s)} \cdot \partial A = \int_A \frac{V(x) \cdot y}{I_z \cdot e(s)} \cdot \partial A$$

$$\tau(s) = \frac{V(x)}{I_z \cdot e(s)} \cdot \int_A y \cdot \partial A$$

- $\tau(s) = \frac{V(x) \cdot S}{I_z \cdot e(s)}$ onde:

τ : tensão de cisalhamento;

V: força cortante na seção em estudo;

e: espessura da seção;

I_z: momento de inércia com relação ao eixo neutro z;

S: momento estático da parte da seção estudada com relação ao eixo neutro z.

$$\partial F = \tau(s) \cdot e(s) \cdot \partial s$$

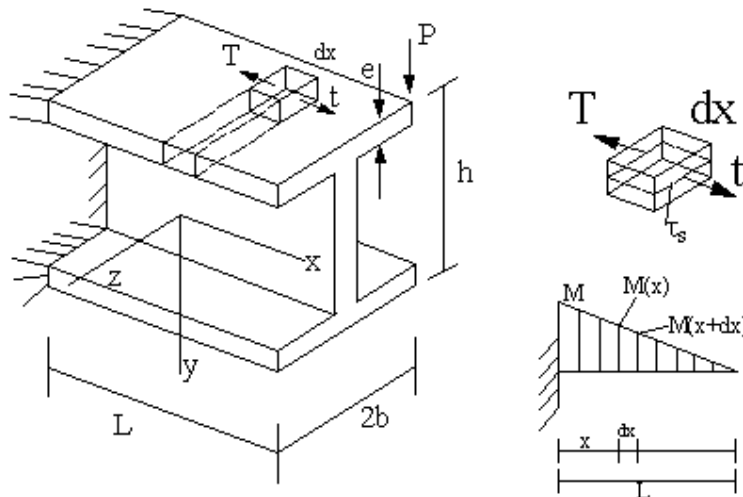
$$F = \int_0^s \partial F$$

$$F = \int_0^s \tau(s) \cdot e(s) \cdot \partial s = \int_0^s \frac{V(x) \cdot S}{I_z \cdot e(s)} \cdot e(s) \cdot \partial s$$

Geralmente $e(s) = \bar{e}(s) = cte$

$$\therefore F = \frac{V(x)}{I_z} \cdot \int_0^s S(s) \cdot \partial s$$

Exemplo 1:



$$\tau(s) = \frac{V(x) \cdot S}{I_z \cdot e(s)}$$

$$V(x) = P$$

$$e(s) = e$$

$$I_z = \frac{h^3 \cdot e}{12} + 2 \cdot \left(\frac{e^3 \cdot 2 \cdot b}{12} + 2 \cdot b \cdot e \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right)$$

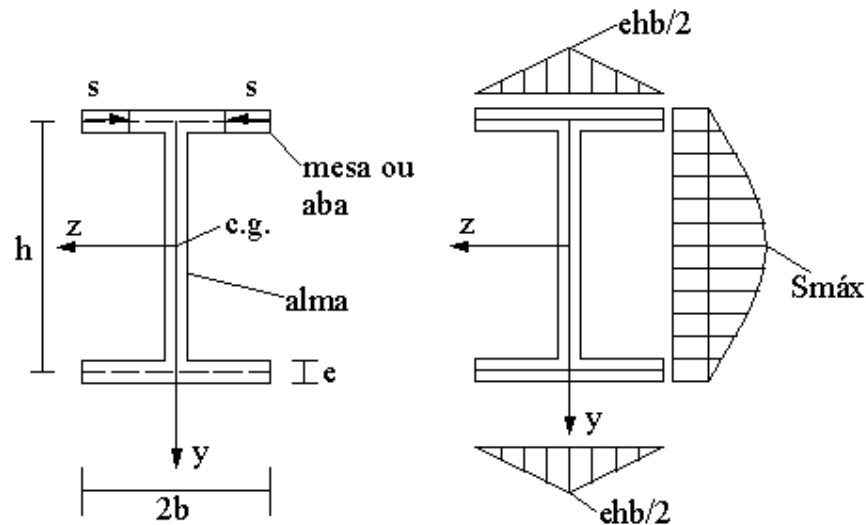
- Variação nas mesas:

$$S(s) = \frac{e \cdot s \cdot h}{2}$$

$$\tau(s) = K \cdot S(s)$$

$$K = \frac{V(x)}{I_z \cdot e(s)} \quad \therefore \tau(s) = \frac{K \cdot e \cdot h \cdot s}{2}$$

Tem-se:



- OBS: As tensões tangenciais verticais τ_v são desprezadas

$$\tau_v = \frac{V(x) \cdot S}{I_z \cdot 2 \cdot b}$$

$$\tau(s) = \frac{V(x) \cdot S}{I_z \cdot e(s)}$$

$$e \ll 2 \cdot b \Rightarrow \tau_v \ll \tau(s)$$

- Para S_2 (outra posição de S) na alma

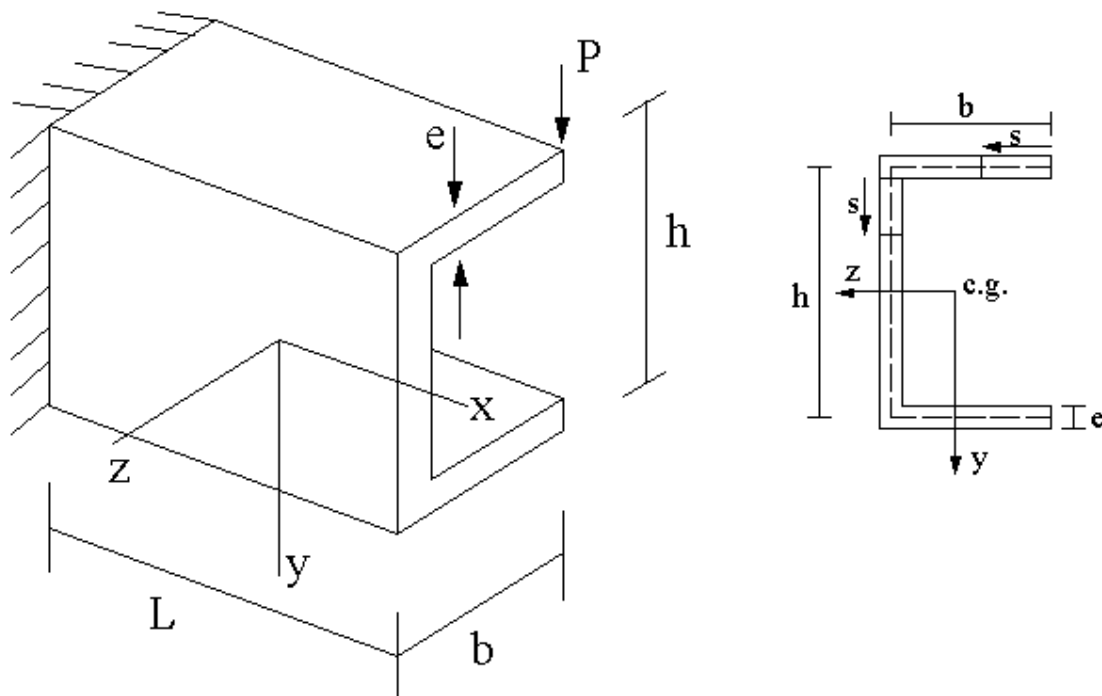
Momento estático

$$S(s) = e \cdot s \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{s}{2} \right) + e \cdot h \cdot b$$

O momento estático é acumulativo.

$$S(s) = \frac{e \cdot s \cdot h}{2} - \frac{e \cdot s^2}{2} + e \cdot h \cdot b$$

$$\tau(s) = K \cdot S(s)$$

Exemplo 2:


$$S(s) = \frac{e \cdot h \cdot s}{2} \text{ (mesa)}$$

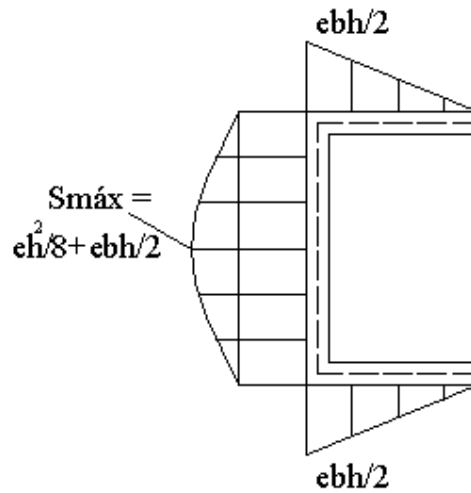
$$S(s) = e \cdot s \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{s}{2} \right) + e \cdot h \cdot b \text{ (mesa + alma)}$$

$$\frac{\partial S(s)}{\partial s} = \frac{e \cdot h}{2} - e \cdot s = 0$$

$$\therefore S = \frac{h}{2}$$

$$S_{\max} = \frac{e \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{e}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 + e \cdot b \cdot \frac{h}{2}$$

$$S_{\max} = \frac{e \cdot h^2}{8} + \frac{e \cdot b \cdot h}{2}$$

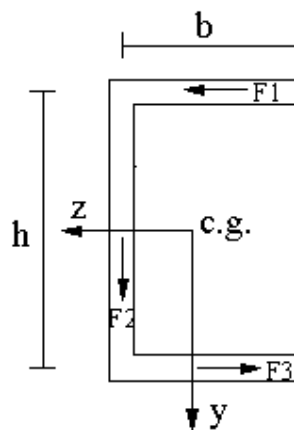


$$\tau(s) = \frac{V(x) \cdot S}{I_z \cdot e(s)}$$

$$\tau(s) = K \cdot S(s)$$

$$V(x) = P$$

$$I_z = \frac{h^3 \cdot e}{12} + 2 \cdot \left(\frac{e^3 \cdot b}{12} + b \cdot e \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right)$$



$$F = \frac{V(x)}{I_z} \cdot \int_0^s S(s) \cdot \partial s$$

- $F_1 = \frac{P}{I_z} \cdot \int_0^b S(s) \cdot \partial s$

- $F_1 = F_3$

$$\int_0^b S(s) \cdot \partial s = \int_0^b \frac{e \cdot h \cdot s}{2} \cdot \partial s = \frac{e \cdot h \cdot b^2}{4}$$

$$\therefore F_1 = \frac{P}{I_z} \cdot \frac{e \cdot h \cdot b^2}{4}$$

- $F_2 = \frac{P}{I_z} \cdot \int_0^h S(s) \cdot \partial s$

$$S(s) = \frac{e \cdot s \cdot h}{2} - \frac{e \cdot s^2}{2} + \frac{e \cdot h \cdot b}{2}$$

$$\int_0^h S(s) \cdot \partial s = \int_0^h \left(\frac{e \cdot s \cdot h}{2} - \frac{e \cdot s^2}{2} + \frac{e \cdot h \cdot b}{2} \right) \cdot \partial s = \frac{e \cdot h^3}{2} - \frac{e \cdot h^3}{6} + \frac{e \cdot b \cdot h^2}{2}$$

$$F_2 = \frac{P \cdot \left(\frac{e \cdot h^3}{2} - \frac{e \cdot h^3}{6} + \frac{e \cdot b \cdot h^2}{2} \right)}{\left(\frac{h^3 \cdot e}{12} + 2 \cdot \left(\frac{e^3 \cdot b}{12} + e \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) \right)}$$

$$e \ll h; e \ll b$$

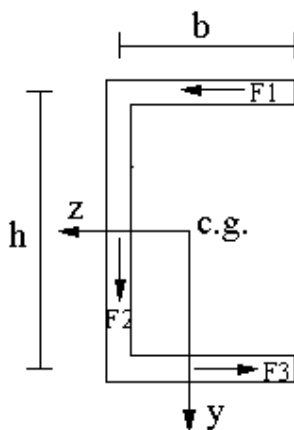
$$\therefore F_2 = P = V(x)$$

Centro de cisalhamento (Seções delgadas simétricas)

O centro de cisalhamento ou centro de torção é o ponto do plano da seção em relação ao qual o momento de todas as resultantes das tensões devidas a τ é nulo. É o ponto por onde deve passar o plano que contém a resultante de V atuante na seção, para que não haja torção.

τ_f : tensão de cisalhamento devido à V

Forças de cisalhamento na seção



$$F_1 = \frac{V}{I_z} \cdot \int_0^b S_z(s) \cdot \partial s$$

$$S_z(s) = \frac{e \cdot h \cdot s}{2}$$

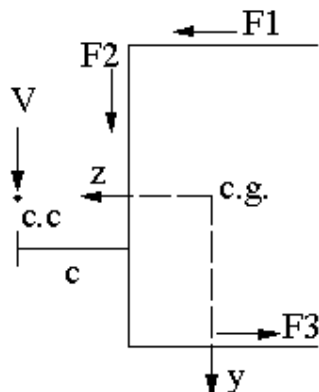
$$F_1 = \frac{V}{I_z} \int_0^b \frac{e \cdot h \cdot s}{2} \cdot \partial s = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{e \cdot h \cdot b^2}{4}$$

$$F_2 = \frac{V}{I_z} \cdot \int_0^h \left(\frac{e \cdot s \cdot h}{2} - \frac{e \cdot s^2}{2} + \frac{e \cdot h \cdot b}{2} \right) \cdot \partial s = \frac{V}{I_z} \cdot \left[\frac{e \cdot h^3}{4} - \frac{e \cdot h^3}{6} + \frac{e \cdot b \cdot h^2}{2} \right] = V$$

$$F_1 = F_3$$

$$I_z = \frac{h^3 \cdot e}{12} + 2 \cdot \left(\frac{e^3 \cdot b}{12} + \frac{e \cdot b \cdot h^2}{4} \right)$$

$$e \ll b ; e \ll h$$



Condições de equivalência

$$F_1 = V ; M_0 = V \cdot c$$

$$F_1 \cdot h = V \cdot c$$

$$c = \frac{F_1 \cdot h}{V}$$

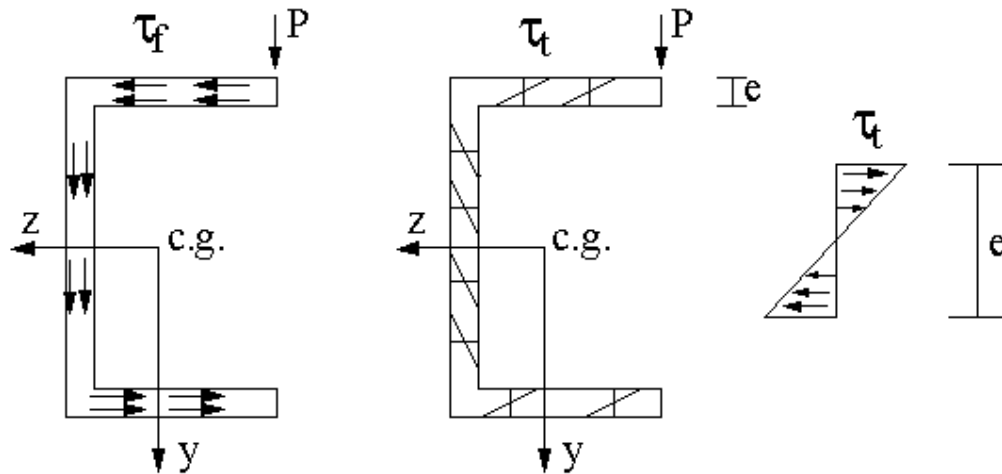
$$c = \frac{V}{I_z} \cdot \frac{h \cdot e \cdot b^2}{4} \cdot \frac{h}{V}$$

$$c = \frac{h^2 \cdot e \cdot b^2}{4 \cdot I_z} ; c = f(e, h, b) \text{ não depende de } V.$$

$$I_z = \frac{e \cdot h^3}{12} + \frac{e \cdot b \cdot h^2}{2}$$

Obs: 1. se a cortante passar pelo C.C. não haverá momento na seção, pois há equivalência entre Vc e M_0 .

2. Se chamarmos de “fluxo de tensões” o produto τt , podemos imaginar uma analogia entre “fluxo de tensões” que percorre a seção e “fluxo de água” que percorreria um encanamento com a forma da seção analisada.



$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

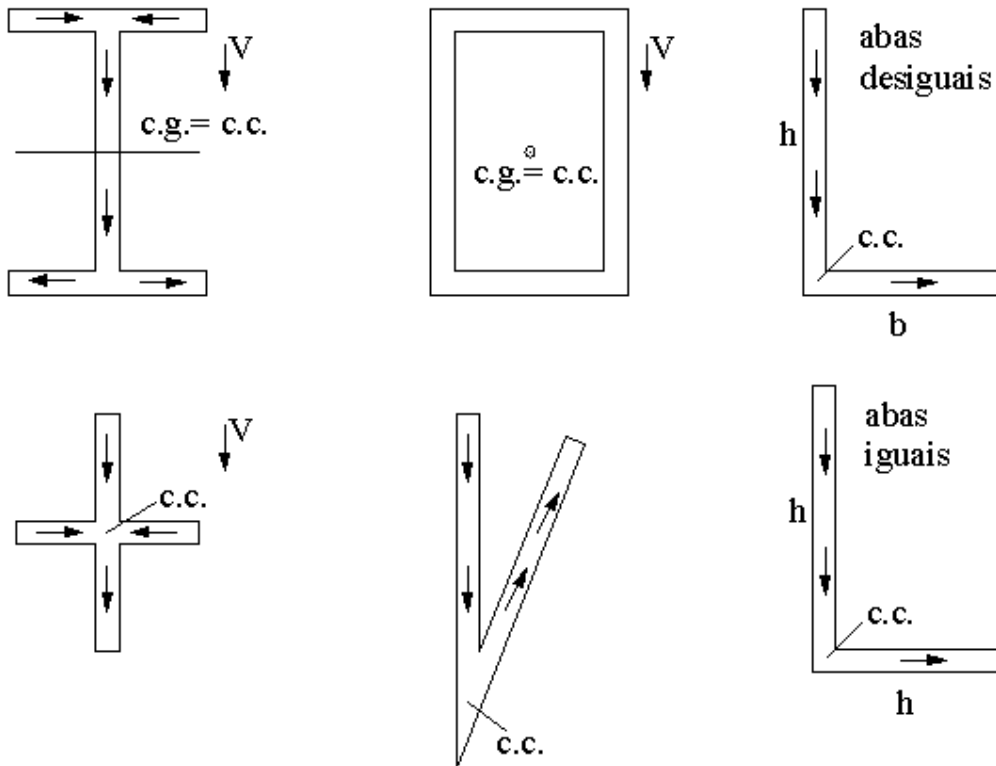
$$V = P$$

$$M = M_t = P \cdot (c + b)$$

$$\tau = \tau_t + \tau_f \text{ (tensão de cisalhamento resultante)}$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} + \frac{V \cdot S}{I_z \cdot e}$$

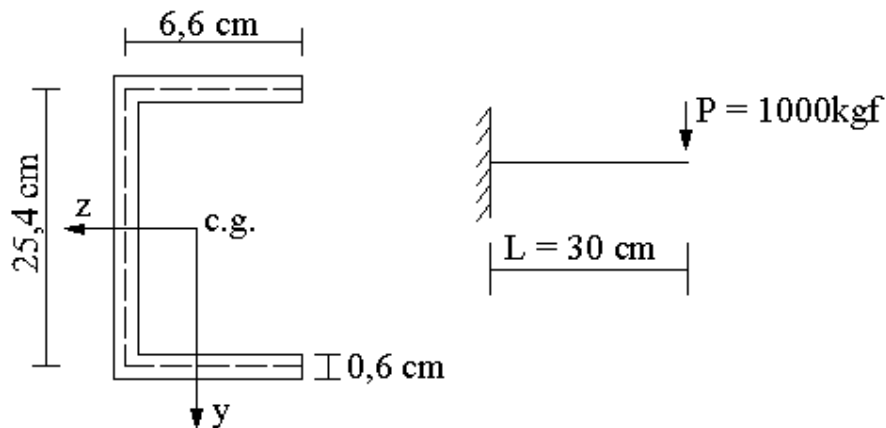
Cantoneiras



Exercícios:

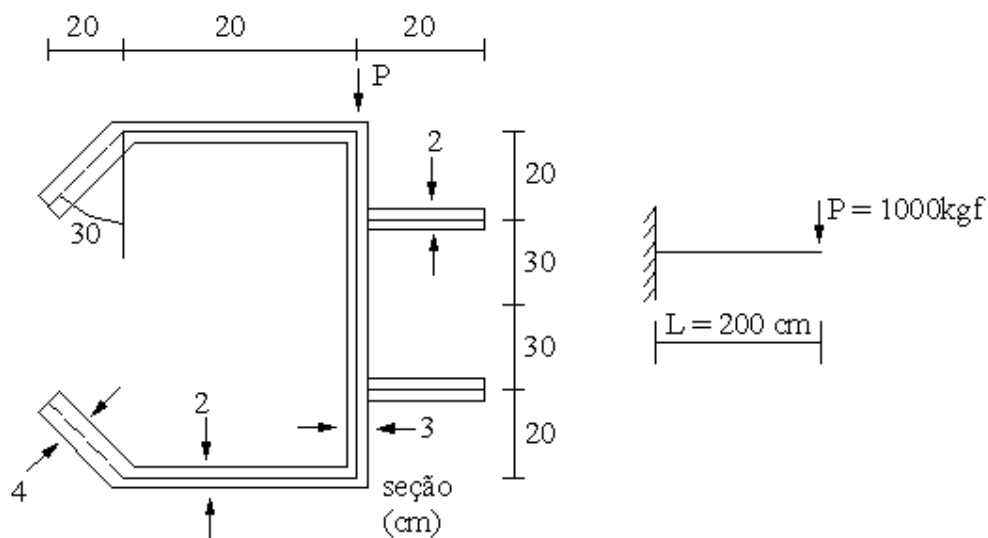
1) Determinar a posição do centro de cisalhamento e calcular as tensões tangenciais.

Dado: $I_z = 2806 \text{ cm}^4$.



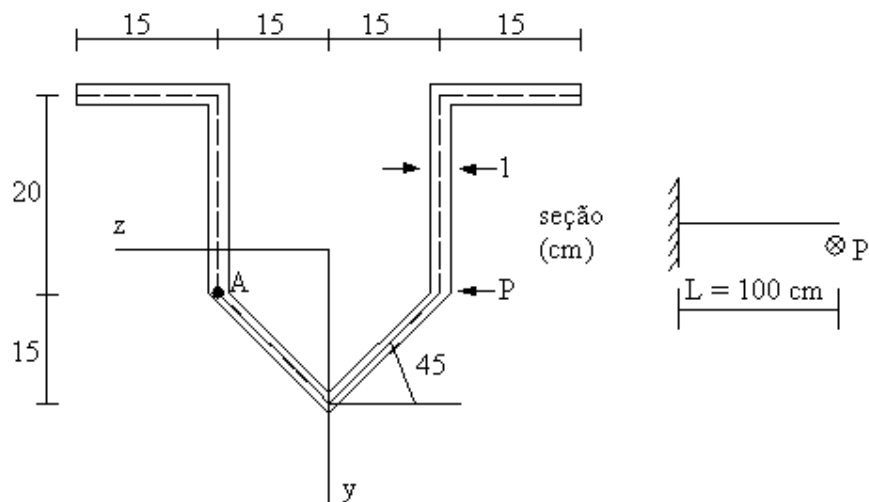
2) Calcular τ_{\max}

Dado: $I_z = 895914 \text{ cm}^4$.



3) Determinar as tensões principais no ponto A da seção mais solicitada.

Dado: $I_y = 27937 \text{ cm}^4$.



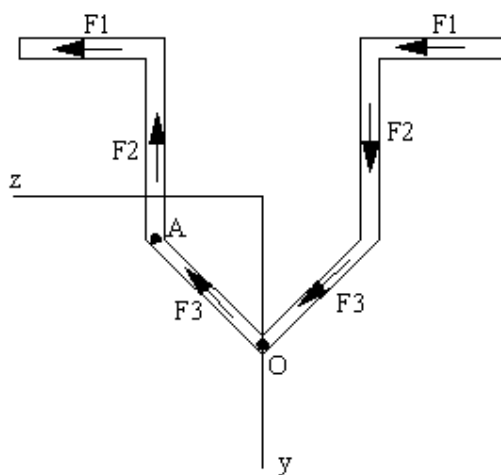
Resolução do exercício 3.

$$M = F \cdot 100$$

$$\sigma_x = \frac{M}{I_y} \cdot z = \frac{100 \cdot F}{27937} \cdot 15 = -0,054F$$

$$I_T = \frac{1}{3} \cdot \sum h_i \cdot t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 \cdot (15 + 20 + 21,21) \cdot 2 = 37,48cm^4$$

$$W_T = \frac{I_T}{t_{\max}} = \frac{37,48}{1} = 37,48cm^3$$



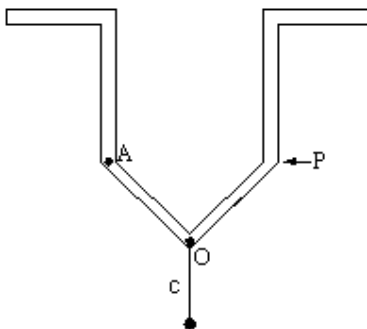
$$F = \frac{V(x)}{I} \cdot \int_0^s S(s) \cdot \partial s$$

$$S_1 = 1 \cdot s \cdot \left(30 - \frac{s}{2}\right) = 30 \cdot s - \frac{s^2}{2}$$

$$F_1 = \frac{P}{I_y} \cdot \int_0^{15} \left(30 \cdot s - \frac{s^2}{2}\right) \cdot \partial s = 2812,5 \cdot \frac{P}{I_y}$$

$$S_2 = 1 \cdot s \cdot 15 + 337,5 = 15 \cdot s + 337,5$$

$$F_2 = \frac{P}{I_y} \cdot \int_0^{20} (15 \cdot s + 337,5) \cdot \partial s = 9750 \cdot \frac{P}{I_y}$$



$$\sum M_0 = 0$$

$$2 \cdot F_2 \cdot 15 - 2 \cdot F_1 \cdot 35 = P \cdot c$$

$$30 \cdot \left(9750 \cdot \frac{P}{I_y} \right) - 70 \cdot \left(2812,5 \cdot \frac{P}{I_y} \right) = P \cdot c$$

$$c = \frac{292500 - 196875}{27937}$$

$$c = 3,42 \text{ cm}$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{P \cdot (15 + c)}{37,48} = \frac{P \cdot 18,42}{37,48} = 0,49 \cdot P$$

$$\tau_f = \frac{V \cdot S}{I_z \cdot e} = \frac{P \cdot 637,5}{27937 \cdot 1} = 0,023 \cdot P$$

$$\tau = \tau_t + \tau_f = 0,49 \cdot P + 0,023 \cdot P = 0,513 \cdot P$$

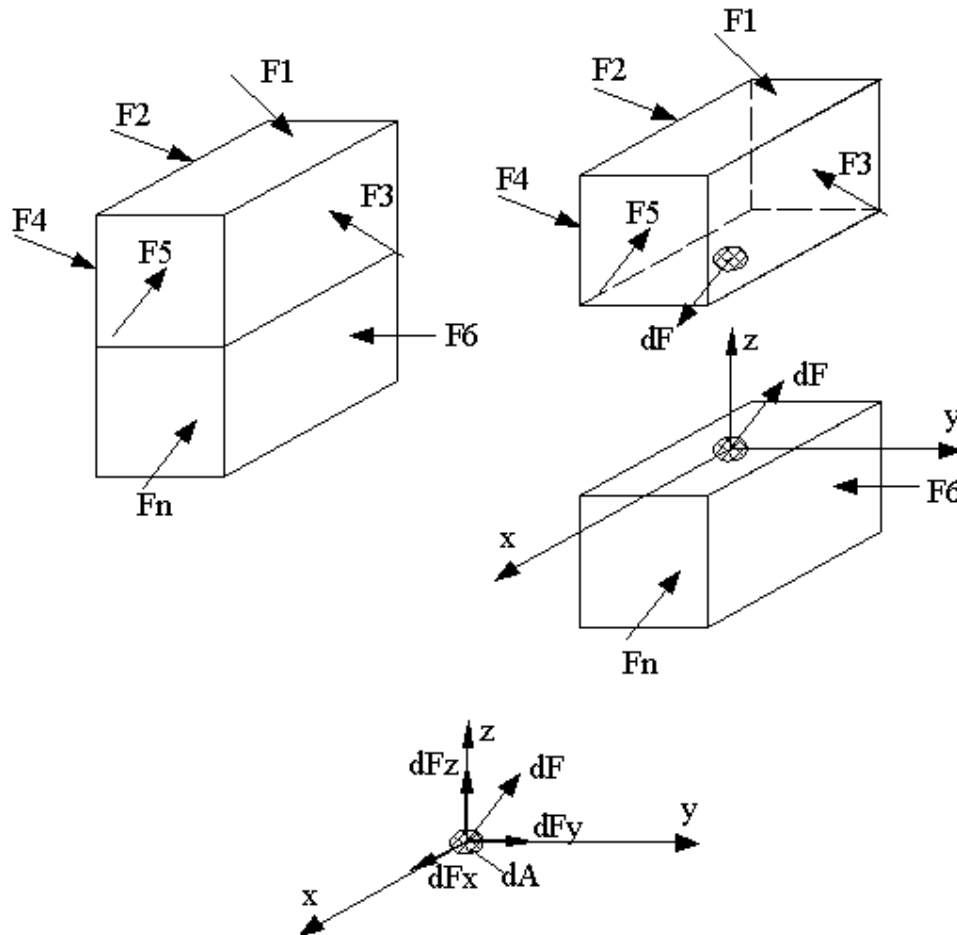
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-0,054P + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-0,054P + 0}{2} \right)^2 + (0,513P)^2}$$

$$\sigma_1 = 0,487P$$

$$\sigma_2 = -0,541P$$

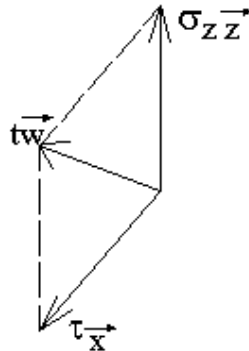
4-TEORIA DAS TENSÕES



$$\lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial F_z}{\partial A} = \sigma_z \rightarrow \text{tensão normal}$$

$$\lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial F_y}{\partial A} = \tau_{zy} \rightarrow \text{tensão tangencial ou tensão de cisalhamento}$$

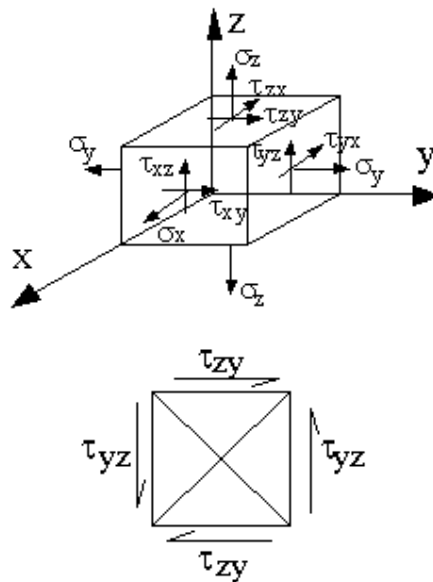
$$\lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial F_x}{\partial A} = \tau_{zx}$$



$$t_w = \sigma_z z + \tau_x x$$

$$(t) = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau^2}$$

- Obs: A tensão é definida no ponto.



$$\sum M_0 = 0 \rightarrow 2 \cdot \tau_{yz} \cdot \partial x \cdot \partial z \cdot \frac{\partial y}{2} = 2 \cdot \tau_{zy} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \frac{\partial z}{2}$$

$$\partial V = \partial x \cdot \partial z \cdot \partial y \neq 0$$

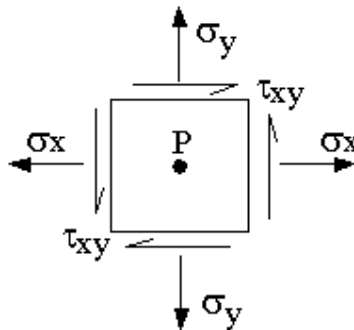
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Teorema de Cauchy.

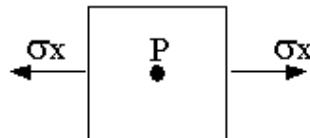
Genericamente $\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \{i, j = x, y, z\}$

São seis as tensões no caso tridimensional.

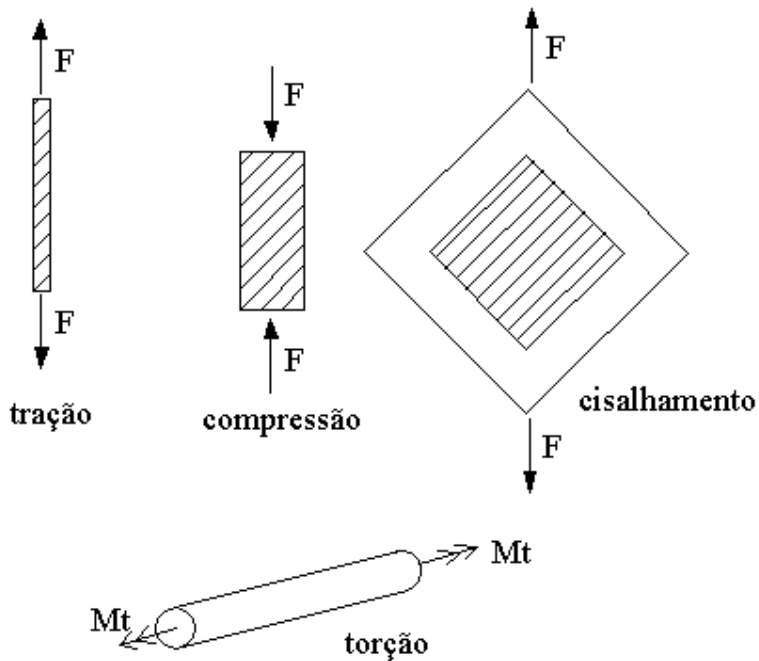
Caso plano



Caso linear

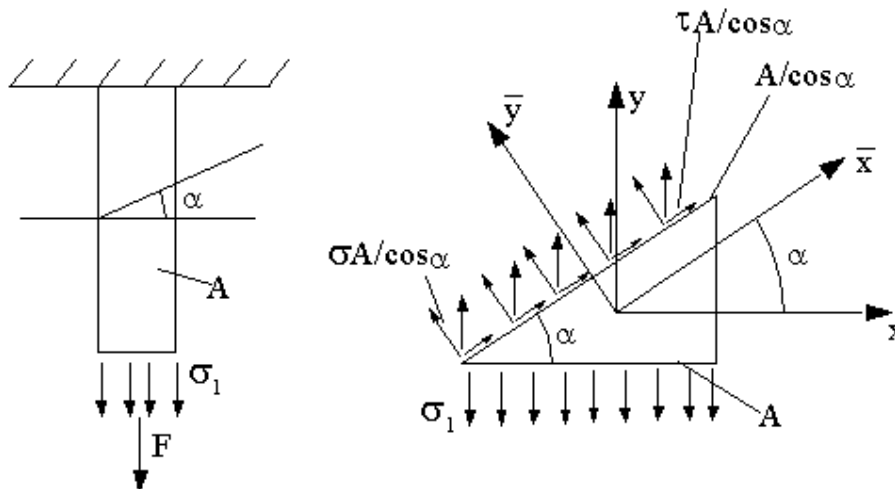


Ensaio de tração: $\rightarrow \sigma = \frac{F}{A} \quad \epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell}$



Estado simples/ Linear/ Unidimensional de tensão

Considere uma barra sem peso, tracionada pela extremidade livre por uma força F centrada. Numa seção genérica, aparecerão tensões normais σ_1 de modo que se tenha o equilíbrio da seção cortada.



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Equilíbrio de forças.

- $\sum F_{\bar{y}} = 0$

$$\frac{\sigma \cdot A}{\cos \alpha} - \sigma_1 \cdot A \cdot \cos \alpha = 0$$

* $\sigma = \sigma_1 \cdot \cos^2 \alpha$

- $\sum F_x = 0$

$$\frac{\tau \cdot A}{\cos \alpha} - \sigma_1 \cdot A \cdot \sin \alpha = 0$$

* $\tau = \sigma_1 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

De outra maneira:

$$1. \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sigma = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$2. \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} \rightarrow \tau = \frac{\tau_1}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1}{2} \cdot \cos 2\alpha\right)^2$$

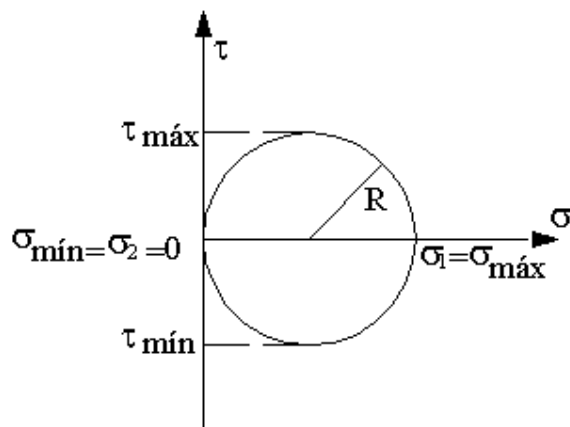
$$\tau^2 = \left(\frac{\tau_1}{2} \cdot \sin 2\alpha\right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2$$

Tensões principais:

- Tensão máxima: σ_1
- Tensão mínima: σ_2

Círculo de Mohr:



Nos planos principais (α' e α'') a tensão tangencial vale zero.

Obs: 1. planos ou direções principais.

2. O ponto do gráfico para o qual convergem todos os planos representativos de cortes na barra é chamado pólo.

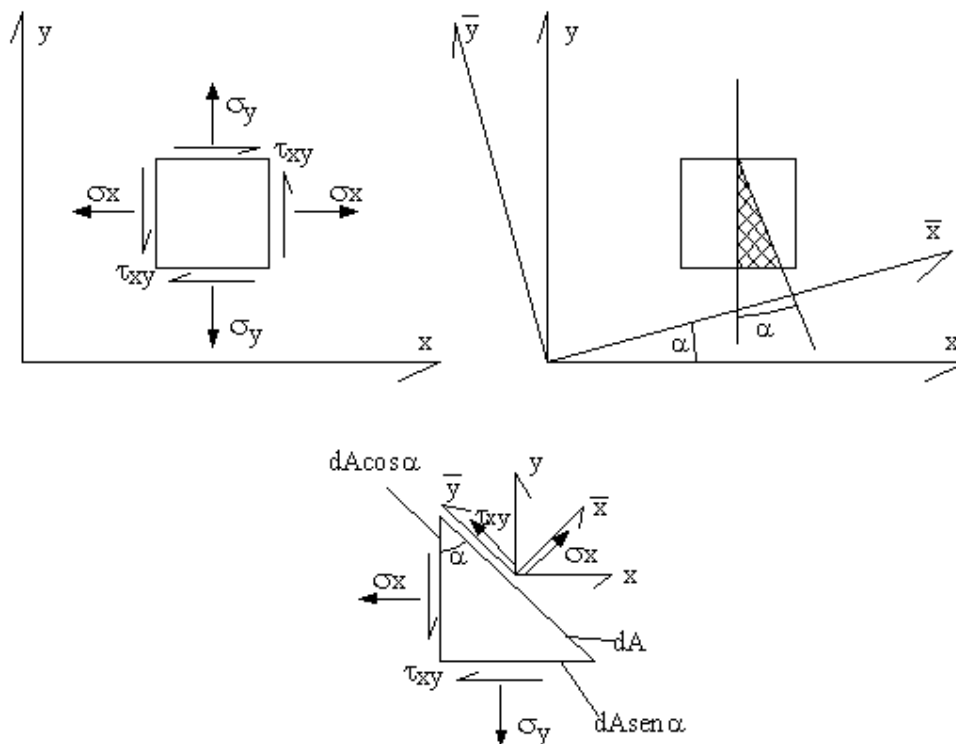
Convenção de sinais:

$\sigma > 0 \Rightarrow$ tração

$\sigma < 0 \Rightarrow$ compressão

Estado Plano (duplo, bidimensional) de tensões

Considere um elemento infinitesimal com solicitação geral de tensões.



Equilíbrio de Forças:

- $\sum \bar{F}_y = 0$

$$\bar{\sigma}_x \cdot \partial A = \sigma_x \cdot \partial A \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \cdot \partial A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \partial A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \partial A \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha$$

- $\sum \bar{F}_x = 0$

$$\bar{\tau}_{xy} \cdot \partial A = \sigma_y \cdot \partial A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \partial A \cdot \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \cdot \partial A \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_x \cdot \partial A \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\bar{\tau}_{xy} = (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Arcos duplos:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\left(\bar{\sigma}_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha \right)^2$$

$$\left(\bar{\tau}_{xy} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha \right)^2$$

$$\left(\bar{\sigma}_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \left(\bar{\tau}_{xy} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \left(\tau_{xy} \right)^2$$

No círculo de Mohr:

- centro do círculo: $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$

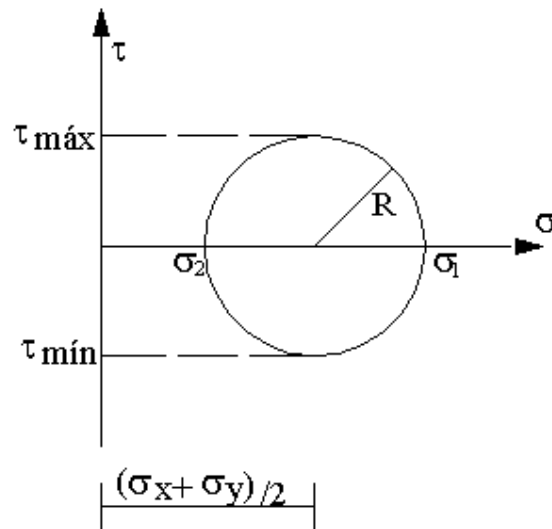
- raio do círculo: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \left(\tau_{xy} \right)^2}$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$$

$$\tau_{\max} = +R$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$$

$$\tau_{\min} = -R$$



Tensões principais (σ_1, σ_2):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

- $\tau_{xy} = 0$

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Direções principais: α' e α''

Propriedade

$$\sigma_x + \sigma_y = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{cte}$$

Expressão Matricial das tensões.

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \end{bmatrix} = [M] \cdot [\sigma] \cdot [M]^T$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{M: matriz de transformação de coordenadas.}$$

M^T : matriz transposta.

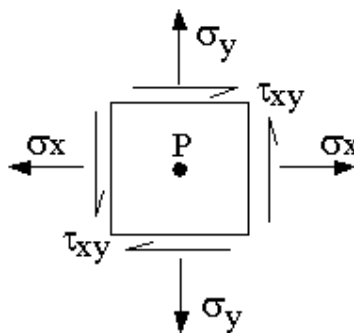
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Exercícios:

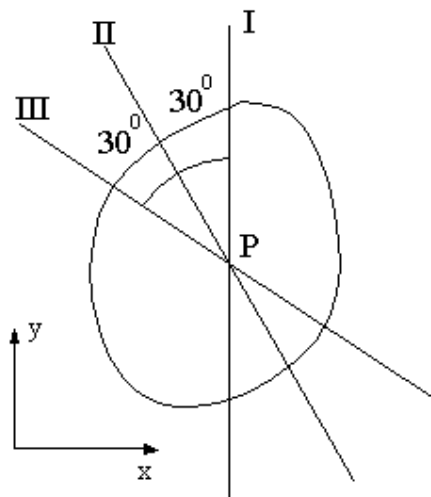
1) Calcular as tensões principais e suas direções, e desenhar o círculo de Mohr.

$$\sigma_x = 160; \sigma_y = 60; \tau_{xy} = 40.$$

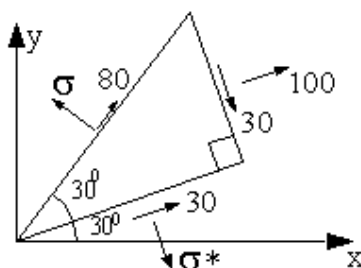


2) Calcular as tensões de cisalhamento nos cortes I, II e III.

$$\sigma_I = 10 \text{ kN/cm}^2; \sigma_{II} = 0; \sigma_{III} = -10 \text{ kN/cm}^2$$

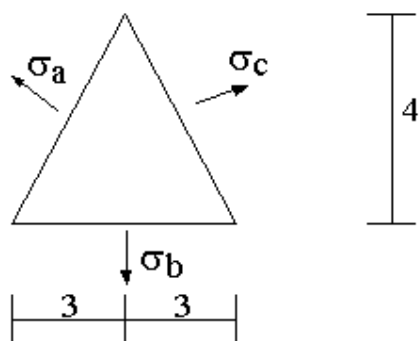


3) Calcular as tensões principais e suas direções.

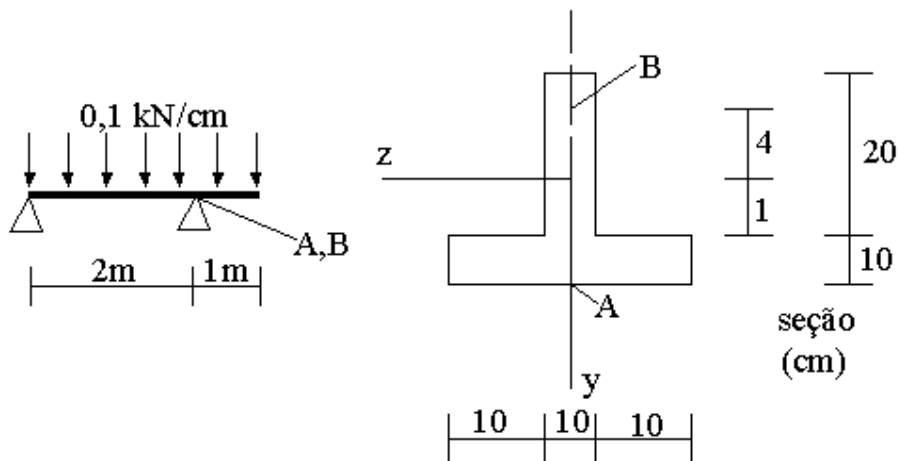


4) Calcular as tensões principais e suas direções.

$$\sigma_a = 3 \text{ kN/cm}^2; \sigma_b = 1,5 \text{ kN/cm}^2; \sigma_c = 0,5 \text{ kN/cm}^2$$



5) Calcular as tensões principais e suas direções nos pontos A e B.



Resolução do exercício 5:

$$I_z = 36167 \text{ cm}^4$$

Reações: $V_a = 7,5 \text{ kN}$, $V_b = 22,5 \text{ kN}$

$$M_z = 500 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

$$V = 12,5 \text{ kN}$$

Ponto A:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{500}{36167} \cdot 11 = -0,152 \text{ kN}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_1 = 0 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = -0,152 \text{ kN/cm}^2$$

Ponto B:

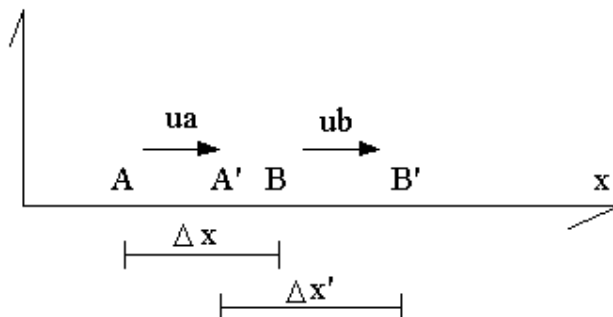
$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y = \frac{500}{36167} \cdot 4 = +0,055 \text{ kN}$$

$$\tau_{xy} = \frac{V \cdot S}{I \cdot t} = -\frac{12,5 \cdot 1725}{36167 \cdot 10} = -0,06 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_1 = 0,09 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = -0,04 \text{ kN/cm}^2$$

5-TEORIA DAS DEFORMAÇÕES



Deformações Normais: $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\gamma_1 = \text{tg} \gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_2 = \text{tg} \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

γ : deformação tangencial ou distorção.

Coefficiente de Poisson:

$$\nu = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} > 0$$

Em materiais isotrópicos (tem o mesmo comportamento elástico em todas as direções): $0 < \nu < 0.5$

- A lei de Hooke estabelece que a tensão aplicada provoca deformação proporcional.

Pode-se afirmar então que se em todos os pontos de um sólido elástico atua tensão σ de direção constante, um comprimento l , sofrerá, na direção da tensão, uma variação de comprimento:

$$\Delta l = l \cdot \frac{\sigma}{E}$$

Se ocorrer solicitação em mais de uma direção pode-se avaliar o efeito de cada tensão isoladamente:

- Tensão σ_x :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\Delta l_x = \varepsilon_x \cdot l_x = \frac{\sigma_x}{E} \cdot l_x$$

$$\Delta l_y = \varepsilon_y \cdot l_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot l_y$$

$$\Delta l_z = \varepsilon_z \cdot l_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \cdot l_z$$

- Analisando o efeito da tensão em y:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \rightarrow \Delta l_y = \varepsilon_y \cdot l_y = \frac{\sigma_y}{E} \cdot l_y$$

$$\Delta l_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \cdot l_x$$

$$\Delta l_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \cdot l_z$$

- Só tensão em z:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \rightarrow \Delta l_z = \varepsilon_z \cdot l_z = \frac{\sigma_z}{E} \cdot l_z$$

$$\Delta l_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \cdot l_x$$

$$\Delta l_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \cdot l_y$$

Por superposição de efeitos:

- $\Delta l_x = \frac{\sigma_x}{E} \cdot l_x - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} \cdot l_x - \nu \cdot \frac{\sigma_z}{E} \cdot l_x$

- $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right)$

Analogamente, ocorre nas outras direções.

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \cdot \left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_x}{E} \right)$$

Além disso, tem-se:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Onde G é o módulo de elasticidade transversal:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Num estado tripo de deformações: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$

Num estado plano de deformações: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \left(\frac{\sigma_y}{E} \right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \cdot \left(\frac{\sigma_x}{E} \right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Para as direções principais:

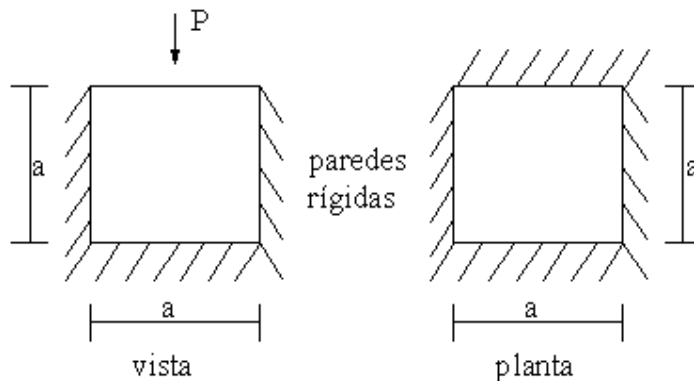
$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\gamma = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Exercícios:

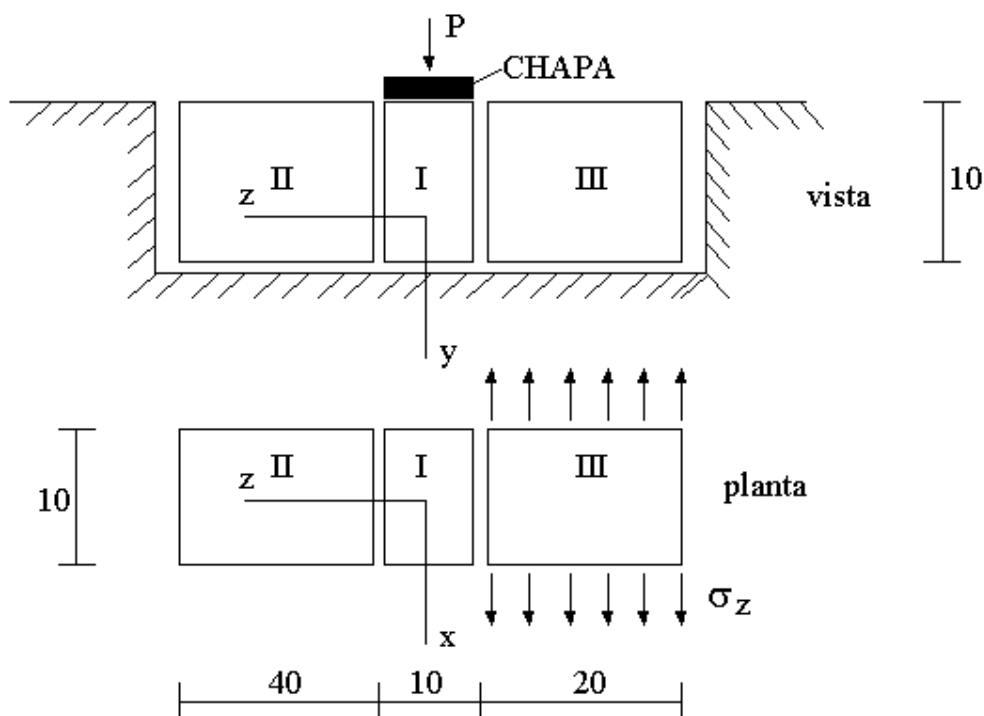
1) Calcular as tensões σ_x , σ_y e σ_z .



2) Calcular $\Delta \ell_x$ do sólido I.

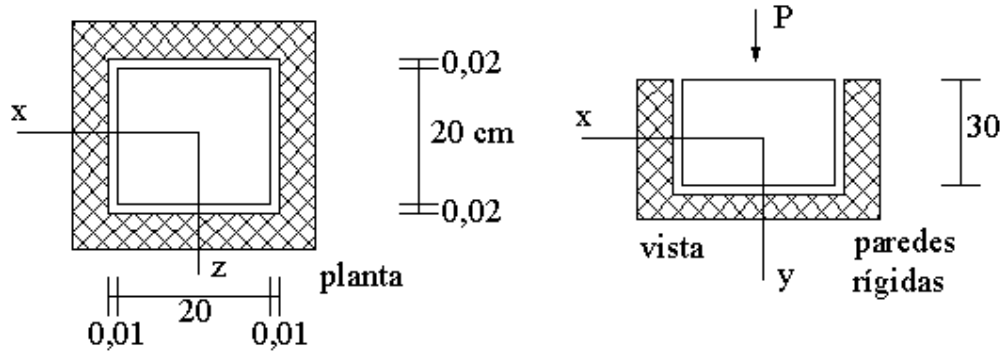
$$\sigma_z = 1 \text{ tf/cm}^2; P = 80 \text{ tf}; E_I = 500 \text{ tf/cm}^2; \nu_I = 0,3; E_{II} = E_{III} = 100 \text{ tf/cm}^2;$$

$$\nu_{II} = \nu_{III} = 0,4$$



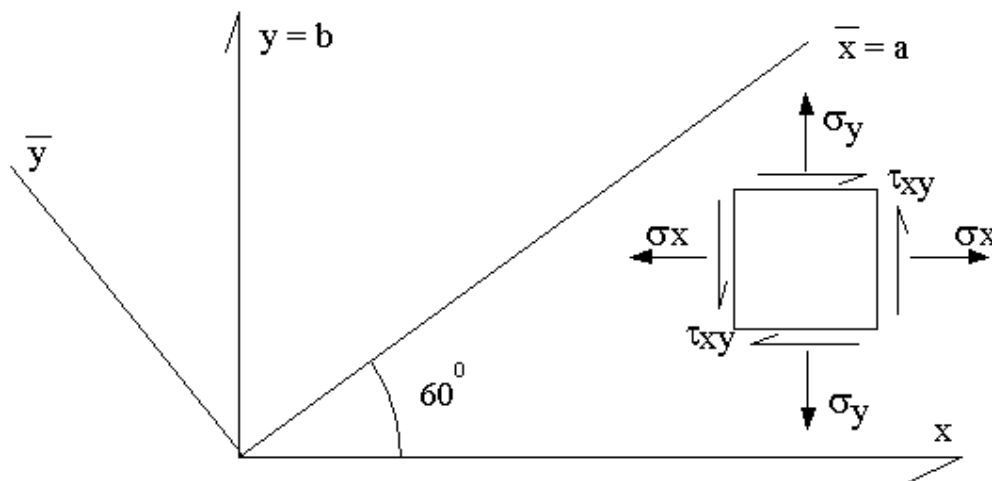
3) Qual o deslocamento total em y e a carga máxima.

Dados: $E = 100 \text{ tf/cm}^2$; $\nu = 0,4$



4) Determinar as tensões.

Dados: $\varepsilon_a = 200 \cdot 10^6$; $\varepsilon_b = 300 \cdot 10^6$; $\varepsilon_a = \varepsilon_2$; $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$

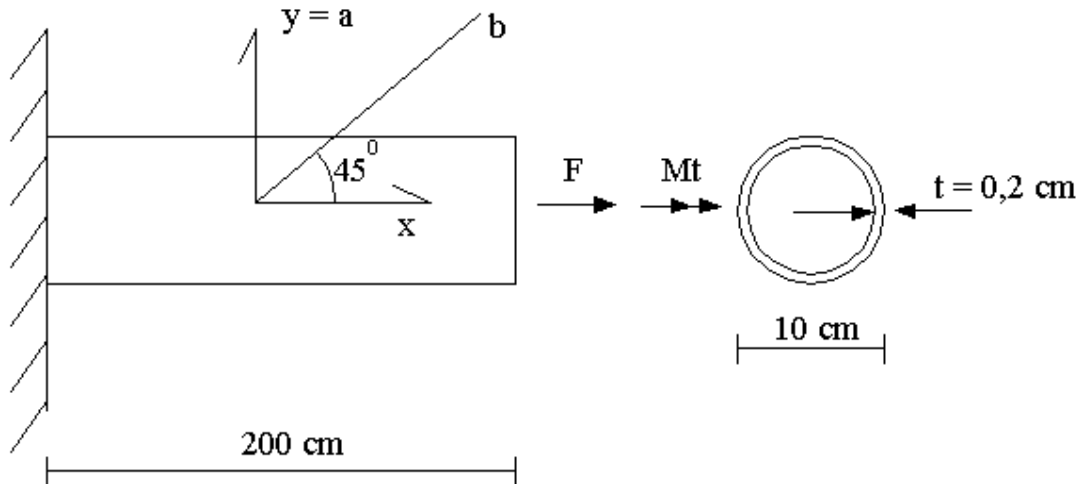


5) Calcular a deformação na direção θ indicada, sabendo que $\varepsilon_x = -0,5\varepsilon_y$.

Dados: $\sigma_x = 1 \text{ KN/cm}^2$; $\nu = 0,3$; $\theta = 30^\circ$

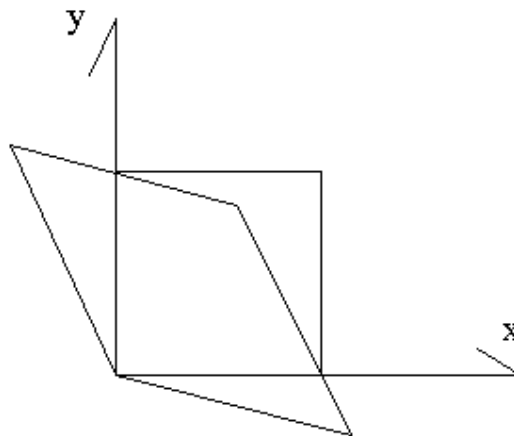
6) Para o tubo de parede fina; calcular M_t e F .

Dados: $\varepsilon_a = -1,4 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon_b = 4,8 \cdot 10^{-4}$; $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$



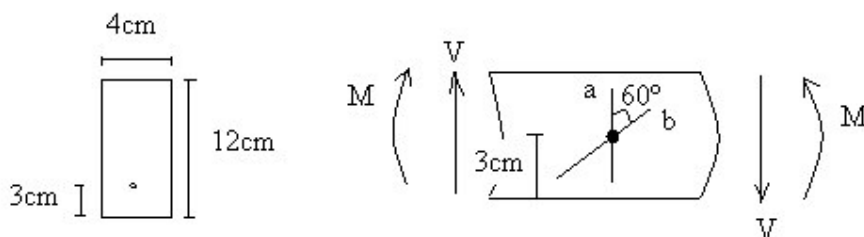
7) Desenhar o círculo de Mohr.

Dados: $\varepsilon_x = -5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = 3 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$



8) No ponto O da viga indicada na figura foram medidas as deformações nas direções A e B e encontrados: $\varepsilon_a = 7,14 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_b = 16,07 \cdot 10^{-5}$. Sabendo-se que essa viga está solicitada apenas por M e V, calcular esses valores, dados:

$$G = 808 \text{ kN/cm}^2; E = 21000 \text{ kN/cm}^2; \nu = 0,3$$



Resolução do exercício 3.

Estágio 1

$$\sigma_x = 0; \sigma_z = 0; \sigma_y = \frac{P}{400}$$

$$\Delta l_x = 0,02 \text{ cm}$$

$$\Delta l_x = \varepsilon_x \cdot l_x$$

$$0,02 = \varepsilon_x \cdot 20$$

$$\varepsilon_x = 0,001$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$0,001 = \frac{1}{100} \left(-0,4 \cdot -\frac{P}{400} \right)$$

$$P = 100 \text{ f}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$0,001 = \frac{1}{100} \cdot \left(-0,4 \cdot \left(-\frac{100}{400} \right) \right)$$

Estágio 2

$$\sigma_z = 0; \sigma_y = \frac{P}{400}$$

$$\Delta l_z = 0,02cm$$

$$\Delta l_z = \varepsilon_z \cdot l_z$$

$$0,02 = \varepsilon_z \cdot 20$$

$$\varepsilon_z = 0,001$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$0,001 = \frac{1}{100} \cdot \left(-0,4 \cdot \left(\sigma_x - \frac{P}{400} \right) \right)$$

$$\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$0 = \frac{1}{100} \left(\sigma_x - 0,4 \cdot \frac{P}{400} \right)$$

$$0,1 = -0,4 \cdot \sigma_x + 0,001 \cdot P \quad (1)$$

$$0 = \sigma_x + 0,001 \cdot P \quad (2)$$

Resolvendo o sistema:

$$\sigma_x = -0,071tf / cm^2$$

$$P = 71,43tf$$

Carga Total:

$$P_{total} = P_1 + P_2 = 100 + 71,43 = 171,43tf$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{100} \cdot \left(-\frac{171,43}{400} - 0,4 \cdot (-0,071 + 0) \right) = -0,004$$

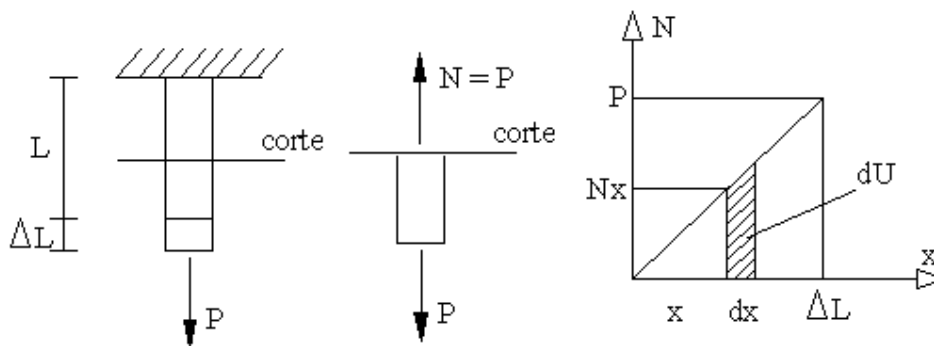
Deslocamento total em y.

$$\Delta l_y = \varepsilon_y \cdot l_y = -0,004 \cdot 30 = -0,12cm$$

6-ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Na mecânica, uma força realiza trabalho quando sofre um deslocamento dx na mesma direção dela.

Por exemplo, ao calcular o trabalho realizado por uma força axial aplicada na extremidade da barra.



Como a força N aumenta gradualmente de 0 até P , o deslocamento varia de 0 até ΔL . Se o material comportar-se de maneira linear-elástica, a força será diretamente proporcional ao deslocamento, ou seja:

$$N_x = K \cdot x \quad \text{onde } K = \text{constante.}$$

Pela Lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)), \text{ sendo } \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\therefore \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} \rightarrow x = \Delta \ell$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

$$N = K \cdot x = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot \Delta \ell$$

$$\partial U = N_x \cdot \partial x = K \cdot x \cdot \partial x$$

O trabalho realizado será:

$$U = \int \partial U = \int K \cdot x \cdot \partial x$$

$$U = \int_0^{\Delta \ell} K \cdot x \cdot dx = \left(\frac{K \cdot x^2}{2} \right)_0^{\Delta \ell}$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Delta \ell$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Delta \ell$$

U: energia de deformação (carregamento lento)

Carregamento lento: carregamento aplicado de zero até o valor final.

Em caso de carregamentos rápidos (carregamentos instantâneos), temos:

$U = N \cdot \Delta \ell$, uma vez que o gráfico apresenta-se como um retângulo.

Exemplos:

Carregamento lento: peso próprio.

Carregamento rápido: ação do vento.

- Energia de Deformação:

Energia de deformação é definida como a capacidade de produzir trabalho. A energia armazenada em sólidos elásticos devido à deformação dos elementos sob ações externas, é igual ao trabalho interno.

Objetivos: Calcular deslocamentos e calcular incógnitas hiperestáticas.

- Métodos de cálculo da energia de deformação:

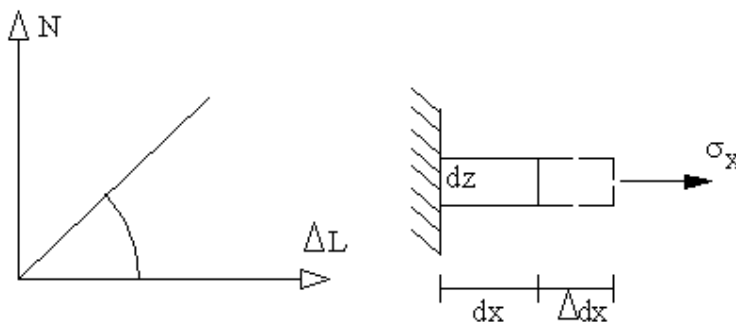
- Pelas tensões
- Pelos esforços solicitantes
- Pelas cargas

a) Cálculo pelas tensões:

Seja um elemento no estado tripla de tensões.

Efeito total = somatório dos efeitos parciais (superposição de efeitos).

Modelo de cálculo



Trabalho = força x deslocamento

Se o elemento de volume está submetido à tensão σ_x :

$$\text{força} = \sigma_x \cdot \partial y \cdot \partial z$$

$$\text{deslocamento} = \varepsilon_x \cdot \partial x$$

$$\text{trabalho} = \sigma_x \cdot \partial y \cdot \partial z \cdot \varepsilon_x \cdot \partial x$$

$$\partial U_{\sigma_x} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \quad \text{e} \quad \partial V = \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z \quad (V = \text{volume})$$

$$\partial U_{\sigma_x} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot dV$$

Analogamente:

- para σ_y : $\partial U_{\sigma_y} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_y \cdot \varepsilon_y \cdot dV$

- para σ_z : $\partial U_{\sigma_z} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \cdot \varepsilon_z \cdot dV$

Efeito total: $\partial U_{\sigma_x} + \partial U_{\sigma_y} + \partial U_{\sigma_z} = \partial U_{\sigma_i}$

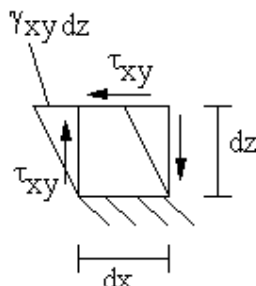
$$\partial U_{\sigma_i} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z + \frac{1}{2} \cdot \sigma_y \cdot \varepsilon_y \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z + \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \cdot \varepsilon_z \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$$

Dividindo ambos os lados por $\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$

$$U_{0,\sigma} = \frac{\sum \partial U_{\sigma_i}}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z} = \frac{\sum \partial U_{\sigma_i}}{dV}$$

$U_{0,\sigma}$: Energia específica de deformação (só as tensões normais)

Para um elemento de volume, a tensão de cisalhamento provoca deformação no elemento.



Assim, a energia de deformação armazenada no elemento é:

$$\partial U_{\alpha z} = \frac{1}{2} \cdot \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$$

$$\partial U_{\alpha y} = \frac{1}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$$

$$\partial U_{\gamma z} = \frac{1}{2} \cdot \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} \cdot \partial x \cdot \partial y \cdot \partial z$$

$$\text{Efeito total: } \partial U_{\alpha z} + \partial U_{\alpha y} + \partial U_{\gamma z} = \partial U_{\alpha j}$$

$$U_{0,\tau} = \frac{\sum \partial U_{\alpha j}}{\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z} = \frac{\sum \partial U_{\alpha j}}{dV}$$

$U_{0,\tau}$: Energia específica de deformação (só as tensões de cisalhamento)

Efeito global:

$$U = \sum (\partial U_{\sigma i} + \partial U_{\alpha j})$$

$$U_0 = \sum (U_{0,\sigma} + U_{0,\tau})_{\text{volume}}$$

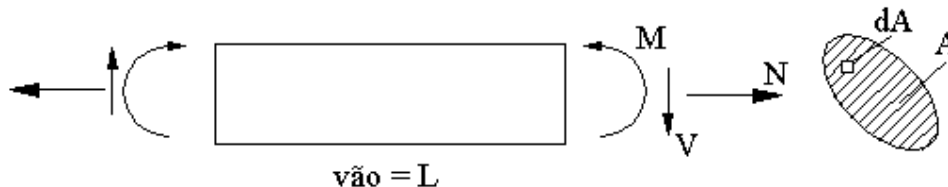
$$U = \int_{\text{volume}} U_0 \cdot dV$$

ou seja:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V (\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}) dV$$

b) Cálculo pelos esforços solicitantes

Considere uma viga:



$$\bullet \quad \sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot y \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = \frac{V \cdot S}{b \cdot I}$$

$$U = \int_{\text{volume}} U_0 \cdot dV$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy})$$

Pela Lei de Hooke:

$$\bullet \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot y \right)^2 + \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{V \cdot S}{b \cdot I} \right)^2 \right]$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N^2}{A^2} + 2 \cdot \frac{N}{A} \cdot \frac{M}{I} \cdot y + \frac{M^2}{I^2} \cdot y^2 \right) + \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{V^2 \cdot S^2}{b^2 \cdot I^2} \right) \right]$$

$$U = \int_0^{\ell} \int_A \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N^2}{A^2} + 2 \cdot \frac{N}{A} \cdot \frac{M}{I} \cdot y + \frac{M^2}{I^2} \cdot y^2 \right) + \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{V^2 \cdot S^2}{b^2 \cdot I^2} \right) \right] \cdot dA \cdot dx$$

Resolvendo as integrais de área, temos:

$$U = \int_0^{\ell} \left[\frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M^2}{I} \right) + \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left(c \cdot \frac{V^2}{A} \right) \right] \cdot dx \quad \text{onde } c = \text{fator de forma.}$$

$$c = A \cdot \int \frac{S^2}{G^2 \cdot I^2} \cdot \partial A$$

Observação: Torção: $\tau_{xy} = \frac{M_t}{w_t} = \frac{M_t}{I_t} \cdot t$

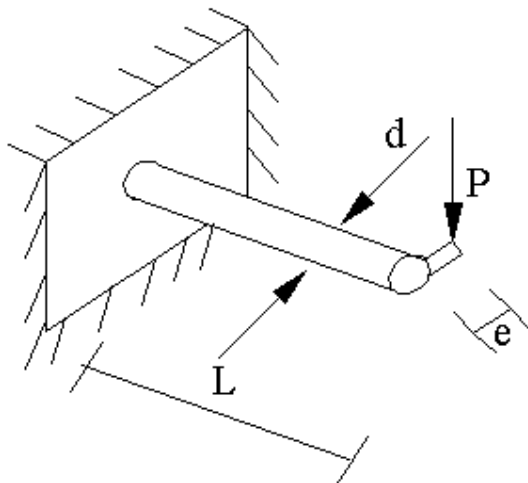
Ou seja,

$$U = \int_0^{\ell} \left[\frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M^2}{I} \right) + \frac{1}{2 \cdot G} \cdot \left(c \cdot \frac{V^2}{A} \right) + \frac{M_t^2}{2 \cdot G \cdot I_t} \right] \cdot dx$$

Exemplo: Calcular a energia de deformação para a estrutura da figura.

Dados: $P = 500 \text{ kgf}$; $d = 4 \text{ cm}$; $c = 1,1$; $E = 2100000 \text{ kgf/cm}^2$; $G = 800000 \text{ kgf/cm}^2$.

$L = 50 \text{ cm}$; $e = 20 \text{ cm}$.



c) Cálculo pelas cargas (*Teorema de Clapeyron*).

$$T = \int_0^t \vec{P} \cdot \vec{\partial t} \quad \text{onde } T = \text{trabalho.}$$

$T = U$ onde $U =$ energia de deformação.

Observação: Teoria de 1ª ordem: pontos A_i e B_i muito próximos.

$$\vec{t} \approx \vec{v}_i$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot P_i \cdot v_i$$

ou genericamente:

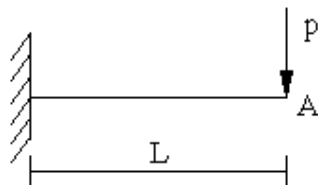
$$T = \sum \frac{1}{2} \cdot P_i \cdot v_i$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \left(\frac{N^2}{E \cdot A} + \frac{M^2}{E \cdot I} + c \cdot \frac{V^2}{G \cdot A} + \frac{M_t^2}{G \cdot I_t} \right) \cdot \partial x$$

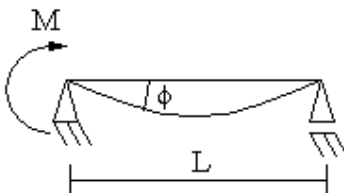
$T = U \rightarrow$ Teorema de Clapeyron: conservação de energia

Pode-se portanto calcular o deslocamento no ponto e na direção da força ou momento aplicado, com esse teorema. A aplicação é bastante limitada, pois apenas **uma** força externa ou momento pode atuar na estrutura.

Exemplo 1: Calcular o deslocamento vertical do ponto A.



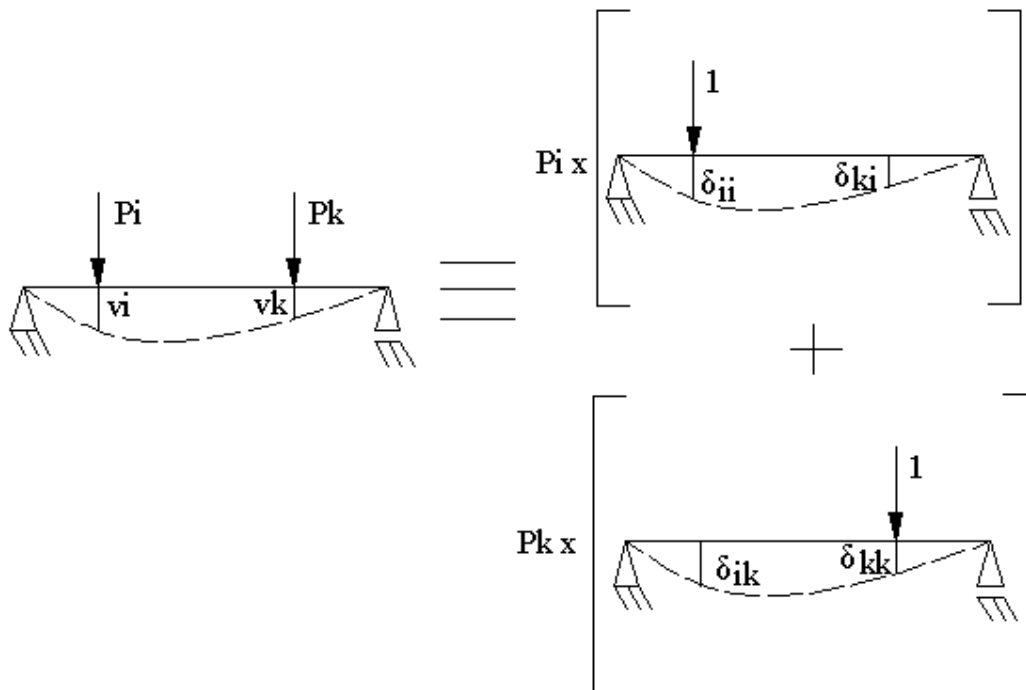
Exemplo 2: calcular o giro (ϕ) no apoio fixo.



Teorema de Maxwell

Trata de uma estrutura elástica com duas cargas P_i e P_k .

Seja a viga abaixo. Por superposição de efeitos:



Considere a teoria de 1ª ordem.

Observação: δ_{ik} : indica a causa (força no ponto k que causa o deslocamento em i).

$$v_i = P_i \cdot \delta_{ii} + P_k \cdot \delta_{ik}$$

$$v_k = P_i \cdot \delta_{ki} + P_k \cdot \delta_{kk}$$

1ª forma de carregamento: $(P_i(0 \rightarrow P_i), P_k(0 \rightarrow P_k))$

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot P_i \cdot P_i \cdot \delta_{ii} + \frac{1}{2} \cdot P_k \cdot P_k \cdot \delta_{kk} + 1 \cdot P_i \cdot P_k \cdot \delta_{ik}$$

2ª forma de carregamento: $(P_k(0 \rightarrow P_k), P_i(0 \rightarrow P_i))$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot P_k \cdot P_k \cdot \delta_{kk} + \frac{1}{2} \cdot P_i \cdot P_i \cdot \delta_{ii} + 1 \cdot P_k \cdot P_i \cdot \delta_{ki}$$

Porém o trabalho realizado é o mesmo: $T_1 = T_2$.

Substituindo os valores, tem-se que $\delta_{ik} = \delta_{ki} \rightarrow$ **Teorema de Maxwell.**

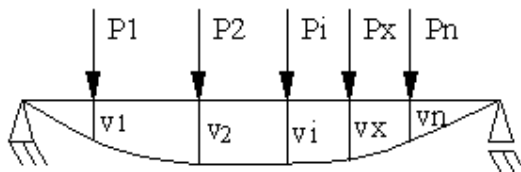
Observações:

- se substituirmos as forças P_i e P_k por um grupo de forças, temos o Teorema de Betti.
- o Teorema de Maxwell vale se substituirmos forças por momentos.

- **Teorema de Maxwell:** “O deslocamento de um ponto i , na direção i , quando se aplica uma força no ponto k é igual ao deslocamento de um ponto k , na direção k , quando se aplica uma força no ponto i ”.

- **Teorema de Castigliano (1873):** “A derivada parcial da energia de deformação em relação a uma carga P_k é igual ao deslocamento elástico v_k do ponto de aplicação da carga”.

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = v_k$$



$$v_1 = P_1 \cdot \delta_{11} + P_2 \cdot \delta_{12} + \dots + P_i \cdot \delta_{1i} + \dots + P_x \cdot \delta_{1x} + \dots + P_n \cdot \delta_{1n}$$

$$v_2 = P_1 \cdot \delta_{21} + P_2 \cdot \delta_{22} + \dots + P_i \cdot \delta_{2i} + \dots + P_x \cdot \delta_{2x} + \dots + P_n \cdot \delta_{2n}$$

$$v_i = P_1 \cdot \delta_{i1} + P_2 \cdot \delta_{i2} + \dots + P_i \cdot \delta_{ii} + \dots + P_x \cdot \delta_{ix} + \dots + P_n \cdot \delta_{in}$$

$$v_x = P_1 \cdot \delta_{x1} + P_2 \cdot \delta_{x2} + \dots + P_i \cdot \delta_{xi} + \dots + P_x \cdot \delta_{xx} + \dots + P_n \cdot \delta_{xn}$$

$$v_n = P_1 \cdot \delta_{n1} + P_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + P_i \cdot \delta_{ni} + \dots + P_x \cdot \delta_{nx} + \dots + P_n \cdot \delta_{nn}$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot v_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial P_k} \cdot v_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial P_k} \right)$$

$$1^a \text{ derivada} \rightarrow \text{para } i \neq k, \frac{\partial P_i}{\partial P_k} = 0$$

$$\text{para } i = k, \frac{\partial P_i}{\partial P_k} = 1$$

$$2^{\text{a}} \text{ derivada} \rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial P_k}$$

$$i = 1 \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial P_k} = \delta_{1k}$$

$$i = 2 \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial P_k} = \delta_{2k}$$

$$i = i \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial P_k} = \delta_{ik}$$

$$i = k \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial P_k} = \delta_{kk}$$

$$i = n \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial P_k} = \delta_{nk}$$

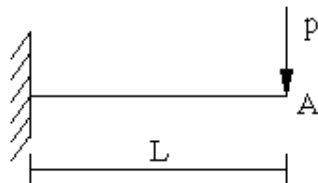
$$P_1 \cdot \delta_{1k} + P_2 \cdot \delta_{2k} + \dots + P_i \cdot \delta_{ik} + \dots$$

Pelo Teorema de Maxwell, tem-se $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

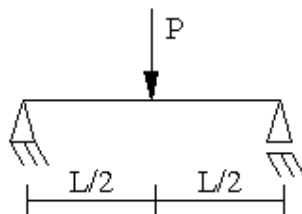
$$\text{Logo: } \frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2} \cdot (v_k + v_k) = v_k$$

Exercícios:

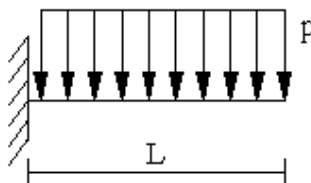
1) Calcular o deslocamento vertical do ponto A.



2) Calcular o deslocamento vertical no meio do vão.



3) Calcular o deslocamento vertical na extremidade livre do vão.

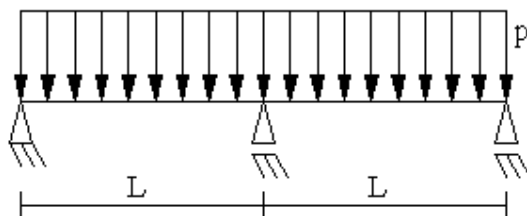


Teorema de Menabrea

$\frac{\partial U}{\partial P_k} = 0$, neste caso P_k é uma incógnita hiperestática.

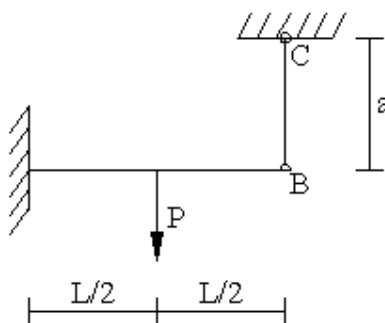
Exercícios:

1) Determinar as reações dos apoios da viga.

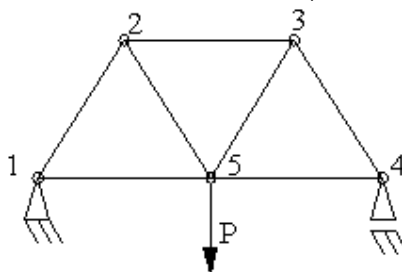


2) Calcular a força na barra e o deslocamento vertical do ponto B.

Viga: E, I. Barra: E_b ; A_b .

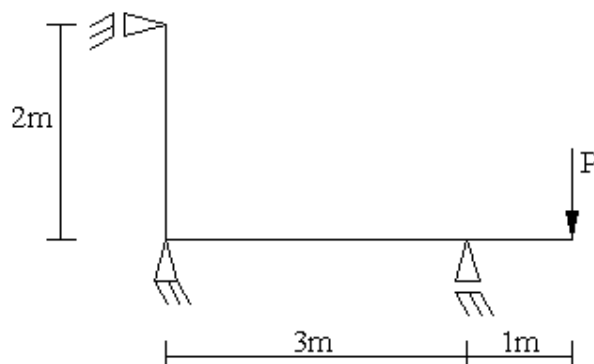


3) Calcular o deslocamento vertical do nó 5 ($EA = \text{constante}$).

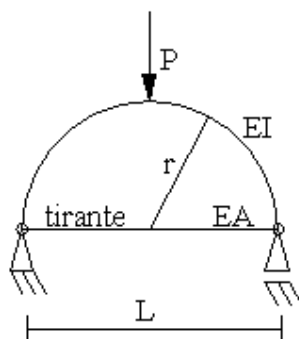


4) Calcular o deslocamento vertical na extremidade livre do balanço.

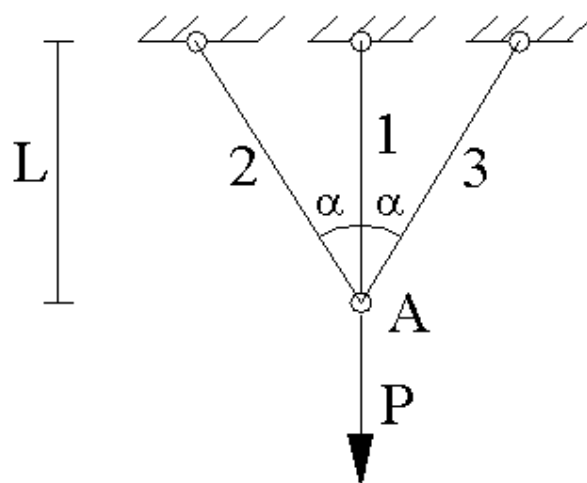
Dados: $E = 2100 \text{ tf/cm}^2$; $I = 1000 \text{ cm}^4$; $P = 2 \text{ tf}$.



5) calcular a força no tirante. Arco: meia-circunferência (raio = r).

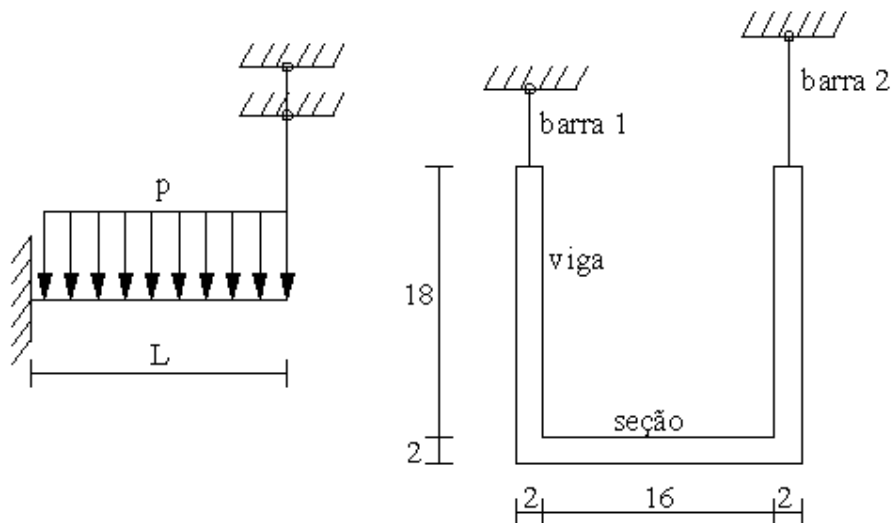


6) Calcular as forças nas barras e o deslocamento vertical do ponto A.



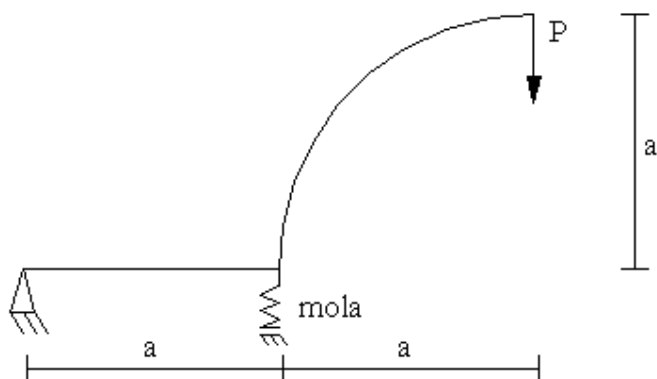
7) Calcular as forças nas barras e seus alongamentos.

Dados: $A_1 = A_2 = 1 \text{ cm}^2$; $L_1 = 100 \text{ cm}$; $L_2 = 200 \text{ cm}$; $E = 2100000 \text{ tf/cm}^2$; $I_{\text{viga}} = 5557,3 \text{ cm}^4$; $A_{\text{viga}} = 112 \text{ cm}^2$; $L = 200 \text{ cm}$.



8) Calcular o deslocamento horizontal e vertical no ponto de aplicação da carga P.

Dado: $c =$ constante da mola.

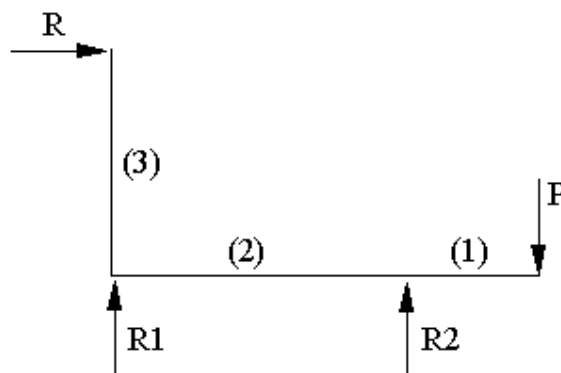


Resolução do exercício 4.

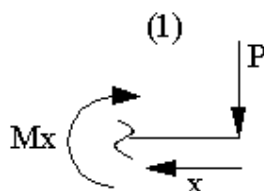
Foi escolhida como incógnita hiperestática o apoio móvel vertical (R).

$$\sum M_{R2} = 0$$

$$R_1 = \frac{-2R - P}{3}$$



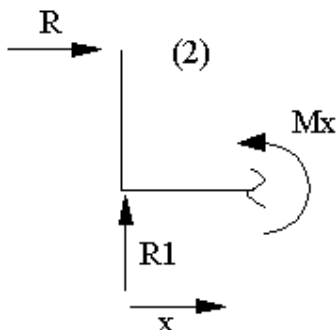
Trecho 1:



$$M_x = P \cdot x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial R} = 0$$

Trecho 2:

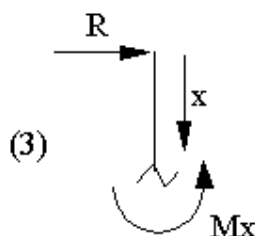


$$M_x = 2 \cdot R + R_1 \cdot x = 2 \cdot R + \left(\frac{-2 \cdot R - P}{3} \right) \cdot x$$

$$M_x = 2 \cdot R - \frac{2}{3} \cdot R \cdot x - \frac{1}{3} \cdot P \cdot x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial R} = 2 - \frac{2}{3} \cdot x$$

Trecho 3:



$$M_x = R \cdot x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial R} = x$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\ell \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial R} = \int_0^\ell M \cdot \frac{\partial M}{\partial R} \cdot dx = 0$$

$$\int_0^\ell M \cdot \frac{\partial M}{\partial R} \cdot dx = \int_0^1 (Px) \cdot (0) \cdot dx + \int_0^3 \left(2R - \frac{2Rx}{3} - \frac{Px}{3} \right) \cdot \left(2 - \frac{2x}{3} \right) \cdot dx + \int_0^2 (Rx) \cdot (x) \cdot dx$$

$$R = \frac{3P}{20}$$

Para $P = 2$ tf, temos $R = 0,3$ tf.

Substituindo R nas equações dos momentos, temos:

Trecho 1:

$$M_x = P \cdot x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = x$$

Trecho 2:

$$M_x = 2 \cdot \left(\frac{3P}{20} \right) - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3P}{20} \right) \cdot x - \frac{1}{3} \cdot P \cdot x = \frac{3P}{10} - \frac{13P}{30} \cdot x$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = \frac{3}{10} - \frac{13}{30} \cdot x$$

Trecho 3:

$$M_x = \frac{3Px}{20}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = \frac{3x}{20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial P} \cdot \partial x = v_A$$

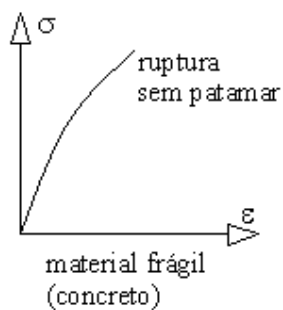
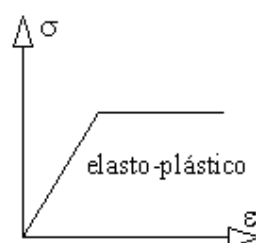
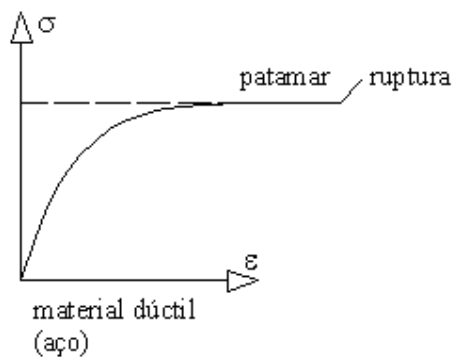
$$v_A = \left(\int_0^1 (Px) \cdot (x) \cdot \partial x + \int_0^3 \left(\frac{3P}{10} - \frac{13Px}{30} \right) \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{13x}{30} \right) \cdot \partial x + \int_0^2 \left(\frac{3Px}{20} \right) \cdot \left(\frac{3x}{20} \right) \cdot \partial x \right) \cdot \frac{1}{E \cdot I}$$

$$v_A = \frac{1}{EI} \cdot \frac{355P}{300} = \frac{1}{2100} \cdot 1,1833 \cdot 2 = 1,127 \cdot 10^{-3} m = 1,127 mm$$

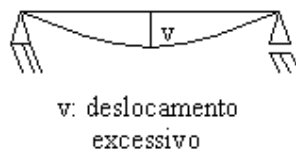
7-CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Estados limites:

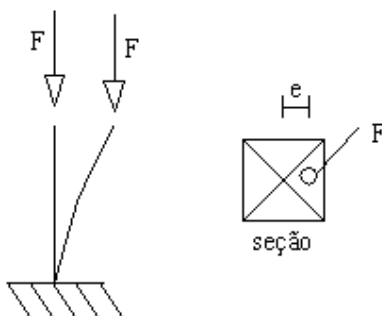
a) Estado limite último: ruptura.



b) Estado limite de utilização:



c) Estado limite de estabilidade:

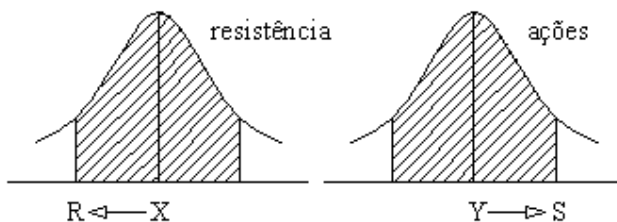


Crítérios de resistência:

- Critérios obsoletos: Critérios de Rankine, Tresca e Saint-Venant.
- Critérios atuais: Critérios de Mohr, Coulomb e von Mises.

A) Critério de Rankine (critério da maior tensão normal).

A maior tensão normal é o limite para a resistência da estrutura. Adota-se, com certa segurança, a tensão normal máxima, a partir de experimentação e das condições de aplicação. Critério adequado para materiais dúcteis.



Observação:

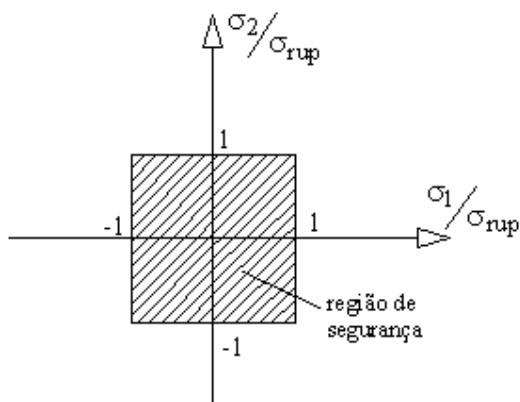
$$\frac{\sigma_{\text{máx}}}{CS} \leq \sigma_{\text{adm}}(\bar{\sigma})$$

$$\sigma_1 \leq \bar{\sigma} \text{ (critério das tensões admissíveis)}$$

Material dúctil: $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{esc}}}{CS}$

Material frágil: $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{rup}}}{CS}$

- Envoltória de ruptura:



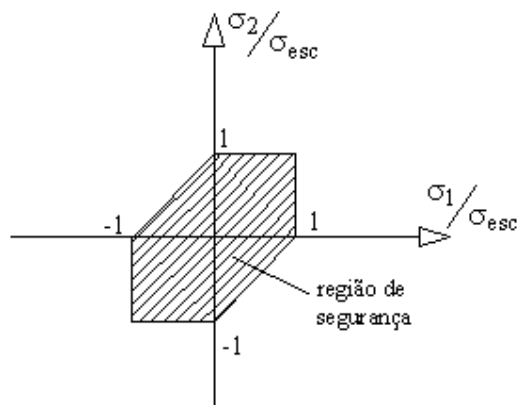
B) Critério de Tresca (critério da maior tensão de cisalhamento):

Ensaio de tração no aço.

O que causa o rompimento do aço é a presença da tensão de cisalhamento que “corta” a superfície da estrutura.

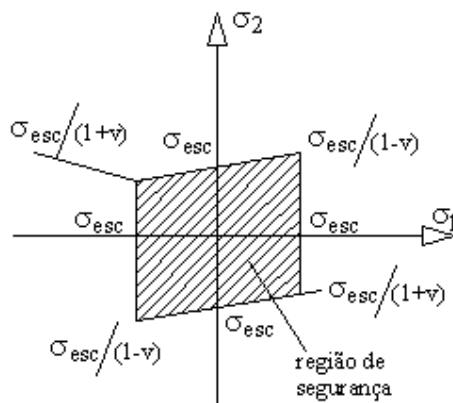
Observação: critério utilizado para materiais dúcteis (aço).

- Envoltória de ruptura:



C) Critério de Saint-Venant (critério de maior deformação normal):

Envoltória de ruptura:

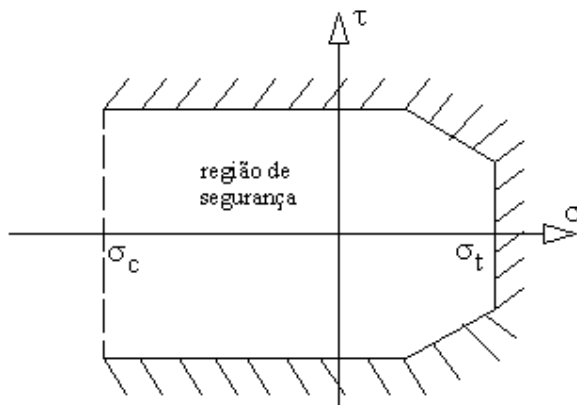


ν : coeficiente de Poisson.

Tanto para materiais dúcteis como para materiais frágeis.

1) Critério de Mohr

Envoltória de segurança:



Critério utilizado para diversos materiais (concreto e ferro fundido).

$$\sigma_c > \sigma_t \rightarrow f_c > f_t$$

Resistência à compressão: f_c .

Resistência à tração: f_t .

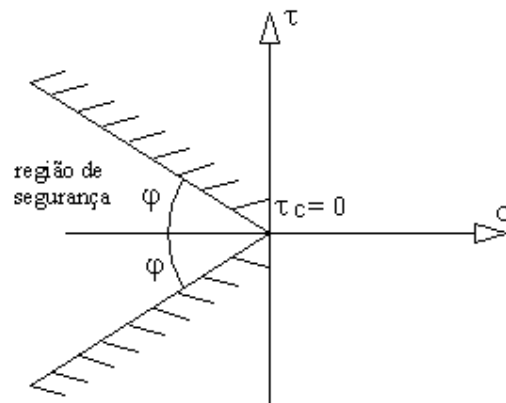
2) Critério de Coulomb (critério definido por dois parâmetros físicos):

φ : Ângulo de atrito interno.

τ_c : Tensão de coesão.

Critério utilizado para areias, argilas e siltes.

a) Materiais sem coesão (areia).

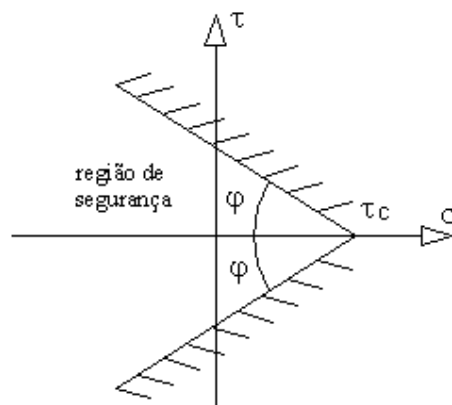


A partir da análise da localização do círculo de Mohr pode-se verificar se há, ou não segurança.

$$\tau_c = 0$$

critério de segurança: $\sin \alpha \leq \sin \varphi$

a) Materiais com coesão (argila).



$$\tau_c \neq 0$$

Mesmo princípio de funcionamento que o anterior.

Exemplo: critério de Mohr-Coulomb.

Resistência à compressão: f_c .

Resistência à tração: f_t .

$$f_t < f_c$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{f_t/2}{d}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\tau_c}{d + f_t/2}$$

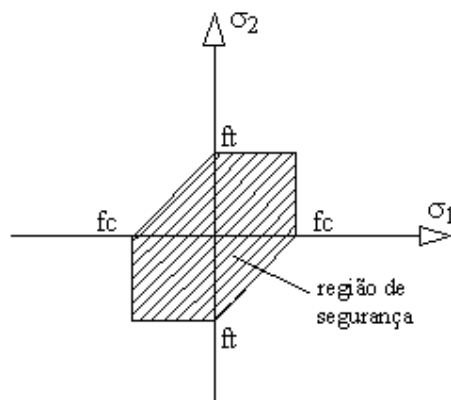
$$d \cdot \text{tg } \varphi + \text{tg } \varphi \cdot \frac{f_t}{2} = \tau_c$$

$$d = \frac{\tau_c \cdot f_t/2 \cdot \text{tg } \varphi}{\text{tg } \varphi}$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{f_c/2}{f_c + \frac{f_t}{2} + d}$$

$\text{sen } \alpha \leq \text{sen } \varphi$ (critério de segurança).

- Envoltória de segurança:

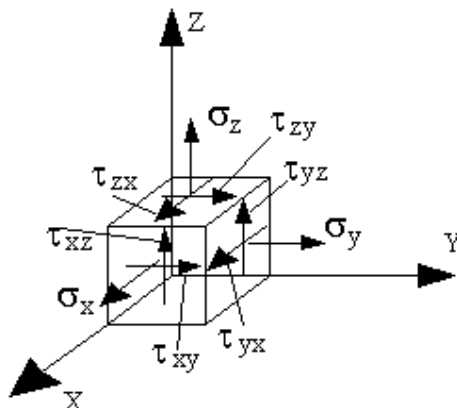


3) Critério da energia de distorção (critério de von Mises).

Utilizado para materiais dúcteis com $f_c \approx f_t$.

Critério baseado nos conceitos de energia de deformação.

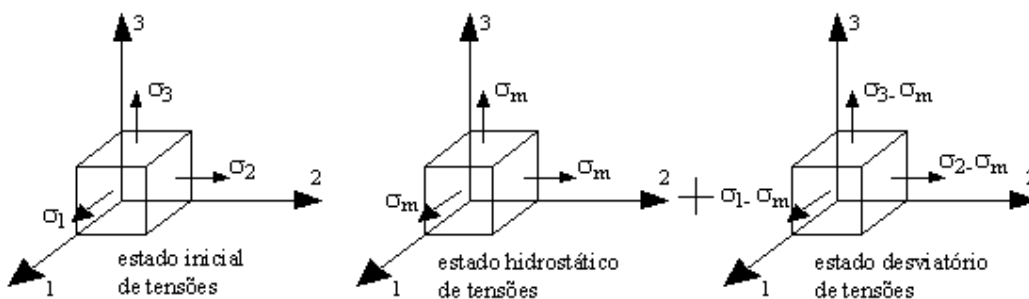
Seja:



$$U_{total} = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2] - \frac{\nu}{E} [\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z] + \frac{1}{2 \cdot G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2]$$

para: $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, teremos um estado principal de tensões em função de σ_1 , σ_2 e σ_3 .

$$U_{total} = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2] - \frac{\nu}{E} [\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3]$$



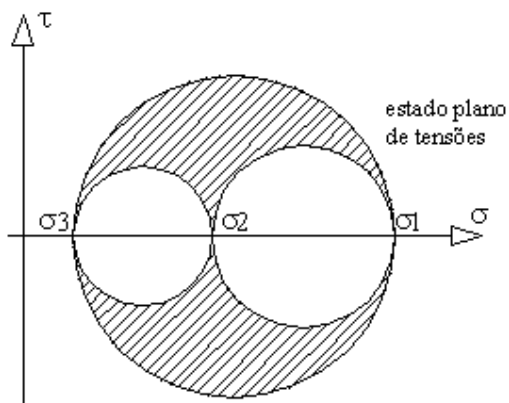
$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_m \cdot \delta_{ij}] + [\sigma_{ij}]_{desv}$$

$$[\sigma_{ij}]_{desv} = [\sigma_{ij}] - [\sigma_m \cdot \delta_{ij}]$$

observação: $i = j \rightarrow \delta_{ij} = 1$, $i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0$

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (Delta de Kronecker).}$$

Círculo de Mohr para o estado hidrostático de tensões.



$$U_{\text{total}} = U_{\text{hidro}} + U_{\text{desv}}$$

$$U_{\text{hidro}} = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot [\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2] - \frac{\nu}{E} \cdot [\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2]$$

$$U_{\text{hidro}} = \frac{1 - 2\nu}{2 \cdot E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

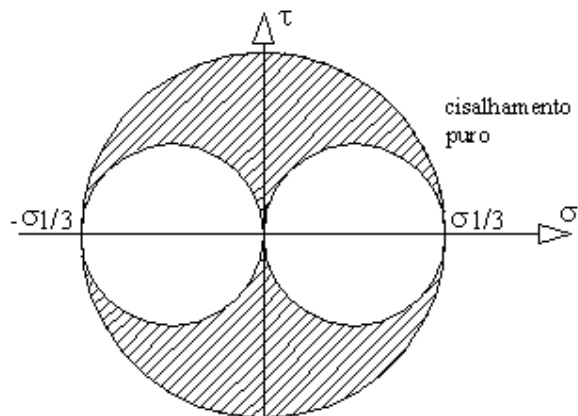
$$U_{\text{desv}} = U_{\text{total}} - U_{\text{hidro}}$$

$$U_{\text{desv}} = \frac{1}{12 \cdot G} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Caso particular: $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (tração pura).

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1}{3} \text{ estado hidrostático de tensões.}$$



$$U_{\text{desv}} = \frac{1}{12 \cdot G} \cdot \left[\left(\frac{\sigma_1}{3} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{2 \cdot \sigma_1}{3} \right)^2 \right] = \frac{\sigma_1^2}{18 \cdot G} \quad (\text{tração pura}).$$

Observação: a energia de deformação correspondente ao estado desviatório de tensão é chamada de energia de distorção.

O critério da energia de distorção faz a seguinte hipótese:

Tração pura: $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$U_{\text{desv}} = U_{\text{dist}} = \frac{2 \cdot \sigma_1^2}{12 \cdot G} \quad (\text{tração pura}).$$

$$U_{\text{desv}} = U_{\text{dist}} = \frac{1}{12 \cdot G} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$\sigma_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\text{para outros pontos: } \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

σ_i : tensão ideal.

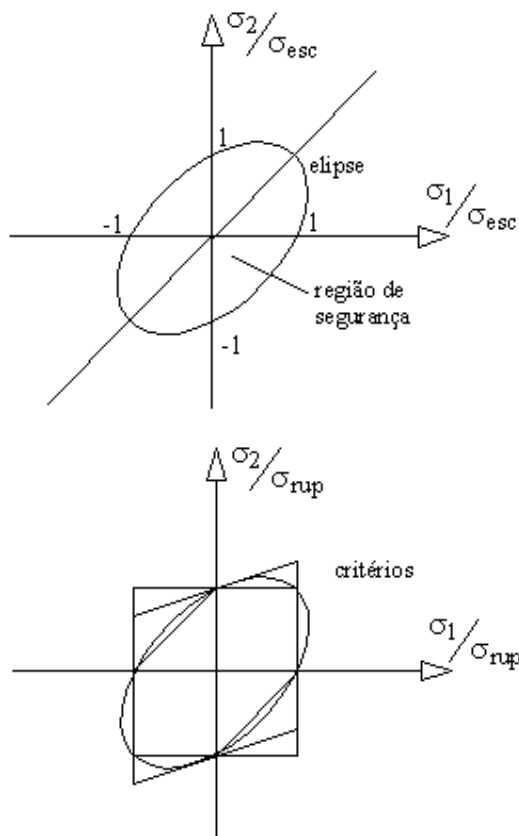
Observações: caso plano de tensões ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$)

$$U_{\text{dist}} = \frac{1}{12 \cdot G} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (-\sigma_1)^2]$$

$$U_{\text{dist}} = \frac{\sigma_1^2}{12 \cdot G} \quad (\text{tração pura}) \quad (\sigma_1 < \sigma_{\text{esc}})$$

$$U_{\text{dist}} = U_{\text{dist}} \quad (\text{tração pura})$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{esc}}} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}^2} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{\text{esc}}} \right)^2 = 1 \quad (\text{equação de uma elipse})$$



Para uma viga: $\sigma_x \neq 0$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} \neq 0$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \sigma_3 = 0$$

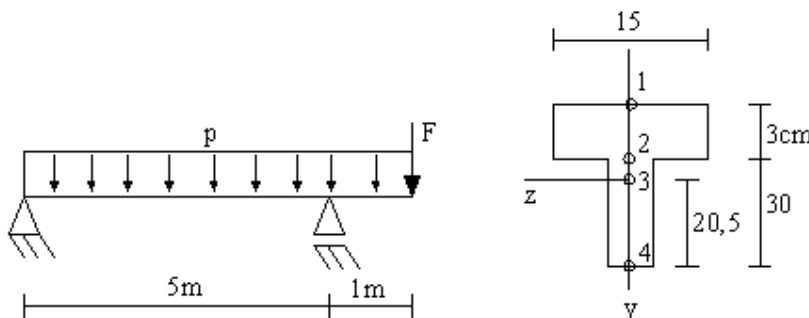
$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

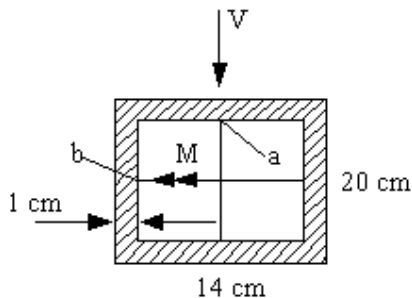
$$\sigma_{ij} \leq \sigma_i$$

Exercícios:

1) Sabendo-se que a tensão máxima de um certo material vale $\sigma_{\max} = 1,3 \text{ kN/cm}^2$ e que este material segue o critério da energia de distorção, verificar se o carregamento na estrutura é seguro. Dados: $p = 8 \text{ kN/cm}^2$; $F = 60 \text{ kN}$; $I_z = 14951,24 \text{ cm}^4$.

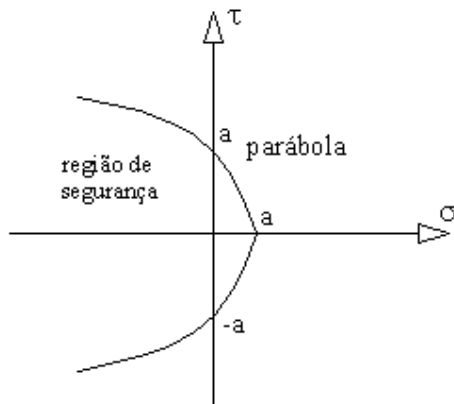


2) Verificar a segurança nos pontos A e B, sendo dados: $M = 50 \text{ tfcm}$; $V = 10 \text{ tf}$; $f_c = 0,8 \text{ tf/cm}^2$; $f_t = 0,4 \text{ tf/cm}^2$.

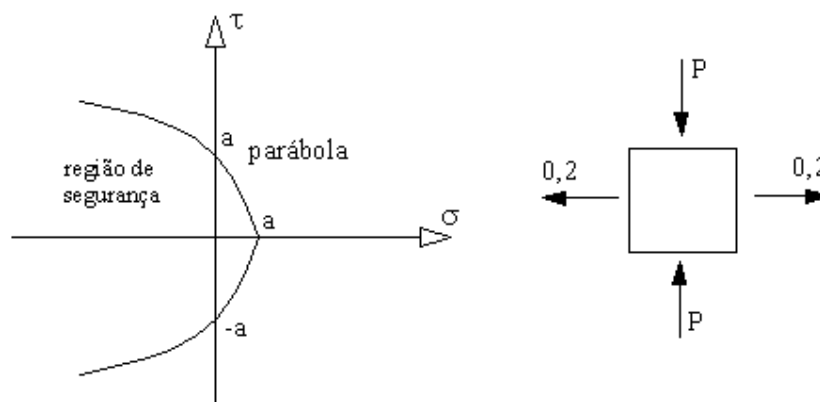


3) O material segue o critério indicado na figura abaixo, verificar a segurança.

Dados: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -3 \text{ tf/cm}^2$, $a = 1 \text{ tf/cm}^2$.



4) Determinar quais valores a tensão P de compressão pode variar sem que haja ruptura. $a = 0,4 \text{ tf/cm}^2$. Tensões em tf/cm^2 .



Resolução do exercício 3:

Equação da parábola:

$$x = ay^2 + by + c$$

pontos conhecidos: (0,1); (1,0) e (0,-1).

$$0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$

$$a = -1; b = 0; c = 1$$

$x = -y^2 + 1$ equação da parábola.

Equação do círculo de Mohr

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\text{raio: } R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{0 + 3}{2} = 1,5$$

$$\text{coordenadas do centro: } (x_0, y_0) = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) = (-1,5; 0)$$

$$(x + 1,5)^2 + (y)^2 = 1,5^2 \text{ equação do círculo}$$

$$x = -y^2 + 1$$

$$(x + 1,5)^2 + (y)^2 = 1,5^2$$

Resolvendo o sistema:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

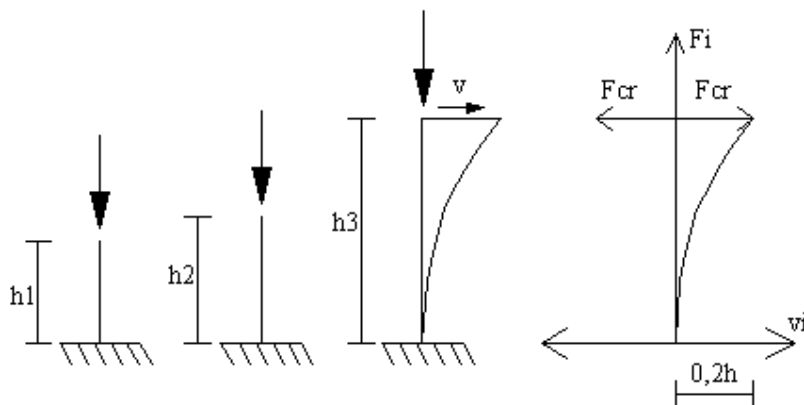
$$\Delta = 0$$

A equação apresenta 2 raízes iguais, portanto a parábola e o círculo de Mohr se tangenciam em um único ponto. Portanto há segurança.

8-FLAMBAGEM

-Estados limites último e de utilização.

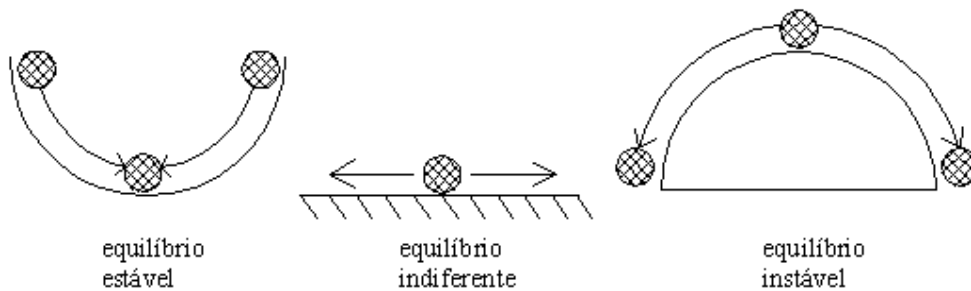
-Resistência; Rigidez; Estabilidade.



F_{cr} = força crítica.

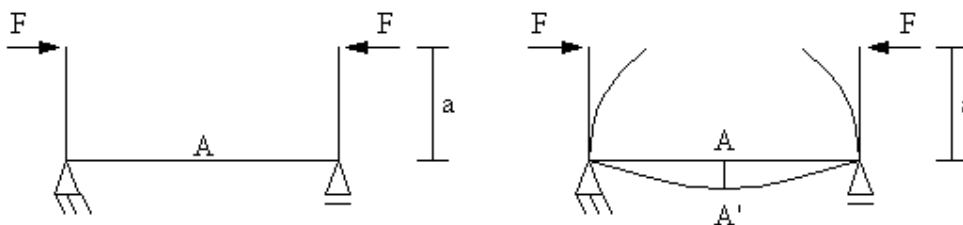
$$1,015 \cdot F_{cr} \rightarrow 20\%h$$

Estabilidade: propriedade que um sistema possui de recuperar seu estado original após ter sido deslocado de sua posição de equilíbrio.



Determinação da força crítica ou força de flambagem ou força de Euler:

- Teoria de 1ª ordem



- Teoria de 2ª ordem

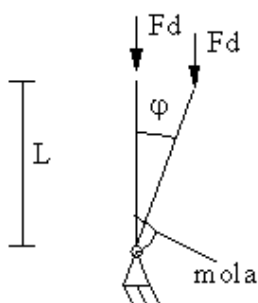
$$E \cdot I \cdot v'' = -M(x)$$

$$K \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

- Teoria de 3ª ordem

$$K = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

- Método do equilíbrio:



$$d = \ell \cdot \sin \varphi \approx \ell \cdot \varphi \text{ (pequenos deslocamentos)}$$

$$M_T = F \cdot d = F \cdot \ell \cdot \varphi$$

$$M_R = c \cdot \varphi$$

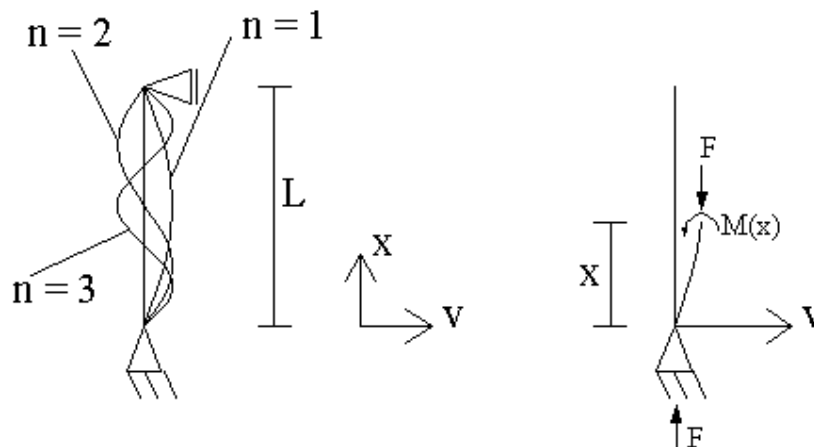
M_T = momento tombador; M_R = momento restaurador

- $M_T < M_R$
- $M_T = M_R$
- $M_T > M_R$

$$F \cdot \ell \cdot \varphi = c \cdot \varphi$$

$$F = \frac{c}{\ell} \text{ (força crítica)}$$

Barra Bi-articulada (articulada-articulada)



$$M(x) = F \cdot v$$

$$E \cdot I_b \cdot v''(x) = -M(x)$$

$$E \cdot I_b \cdot v''(x) = -F \cdot v$$

$$E \cdot I \cdot v''(x) + F \cdot v = 0 \rightarrow \text{Equação diferencial da flambagem}$$

Soluções:

$$v = c_1 \cdot \text{sen } kx + c_2 \cdot \text{cos } kx = v(x)$$

$$v' = c_1 \cdot k \cdot \text{cos } kx - c_2 \cdot k \cdot \text{sen } kx$$

$$v'' = -c_1 \cdot k^2 \cdot \text{sen } kx - c_2 \cdot k^2 \cdot \text{cos } kx$$

c_1, c_2 e k são constantes desconhecidas.

Condições de Contorno:

- $x = 0$, $v = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$v = c_1 \cdot \text{sen } kx$$

$$E \cdot I \cdot v''(x) + F \cdot v = 0$$

$$E \cdot I \cdot (-c_1 \cdot k^2 \cdot \text{sen } kx) + F \cdot (c_1 \cdot \text{sen } kx) = 0$$

$$K = \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}$$

- $x = \ell$, $v = 0$

$$c_1 \cdot \text{sen } k\ell = 0 \rightarrow c_1 \neq 0 \rightarrow \therefore \text{sen } k\ell = 0 \rightarrow k\ell = n \cdot \pi \text{ onde } n = 0,1,2,3$$

$$K^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{E \cdot I}$$

$$n = 1$$

$$\text{Logo: } F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell^2}$$

Barra engastada – livre

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot \ell^2}$$

Barra articulada – engastada

$$F_{cr} = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell^2}$$

Barra bi-engastada

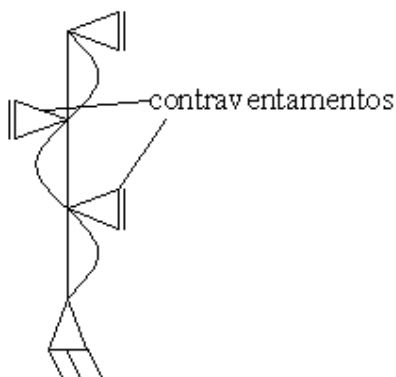
$$F_{cr} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell^2}$$

Comprimento de flambagem (ℓ_{fl}) ou comprimento crítico (ℓ_{cr}):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell_{cr}^2}$$

- $\ell_{cr} = \ell$ para **barra bi-articulada**
- $\ell_{cr} = 2 \cdot \ell$ para **barra engastada - livre**
- $\ell_{cr} = \ell / \sqrt{2}$ para **barra engastada - articulada**
- $\ell_{cr} = \ell / 2$ para **barra bi-engastada**

- **Contraventamentos**



- **Raio de giração**

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{ou} \quad i^2 = \frac{I}{A}$$

- **Índice de esbeltez (λ)**

$$\lambda = \frac{\ell_{cr}}{i}$$

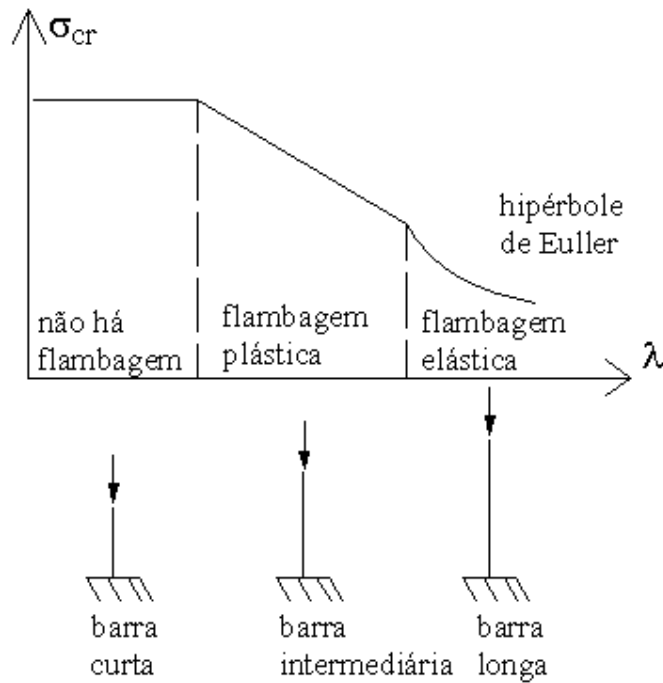
- **Tensão de flambagem ou crítica**

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell_{cr}^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i^2}{\ell_{cr}^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{\bar{k}}{\lambda^2}$$

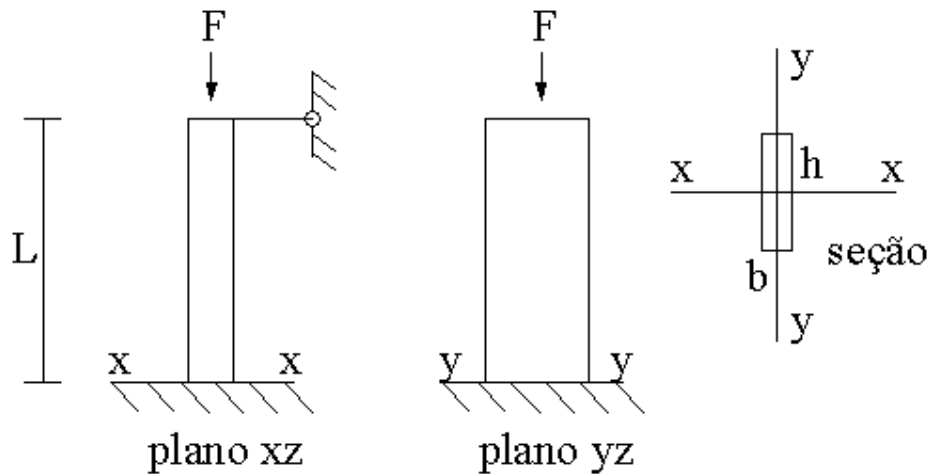
$$\bar{k} = \pi^2 \cdot E$$

No caso de barras pouco esbeltas sujeitas à flambagem, deve-se abandonar o estudo elástico.

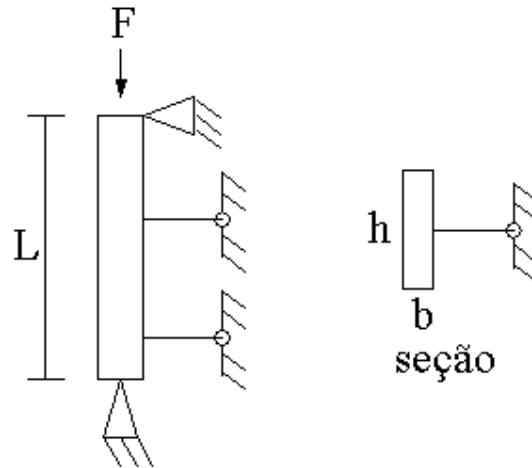


Exercícios:

1) Qual a relação h / b para que o pilar ofereça a mesma segurança contra a flambagem nas direções x e y .

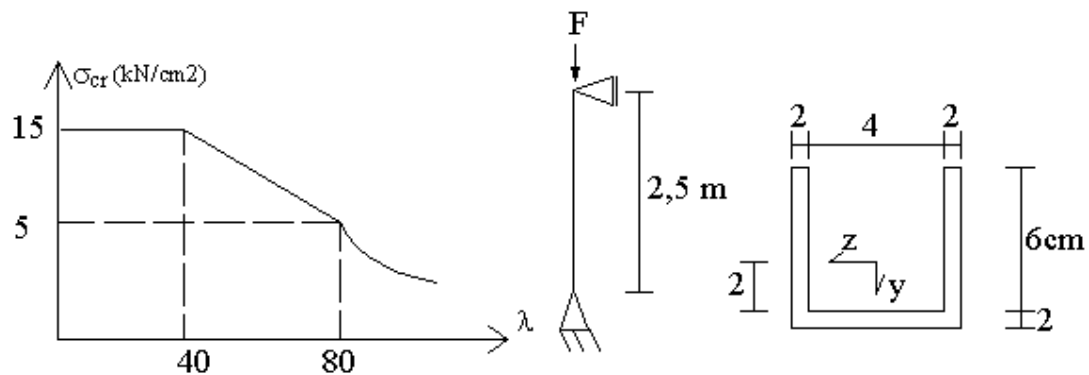


2) Determine o número de contraventamentos para que a carga F seja a máxima possível. Qual a força F neste caso?



3) Um certo material segue o diagrama indicado. Calcular F_{cr} .

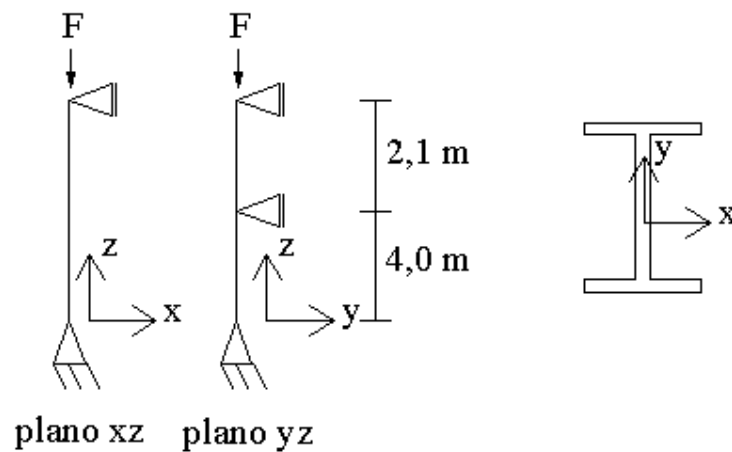
Dados: $I_z = 272 \text{ cm}^4$; $I_y = 896 \text{ cm}^4$; $E = 13000 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$



4) Calcular P máximo.

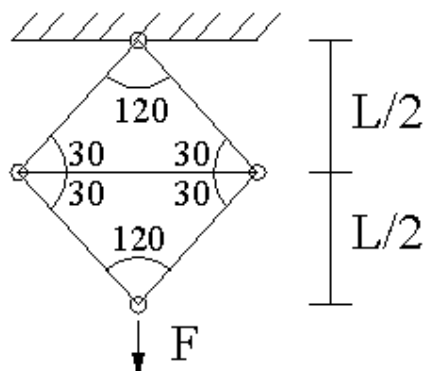
Dados: $\sigma_{cr} = \frac{10363000}{\lambda^2}$ para $\lambda > 105$; $A = 2860 \text{ mm}^2$;

$I_x = 20 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $I_y = 1,4 \times 10^6 \text{ mm}^4$.



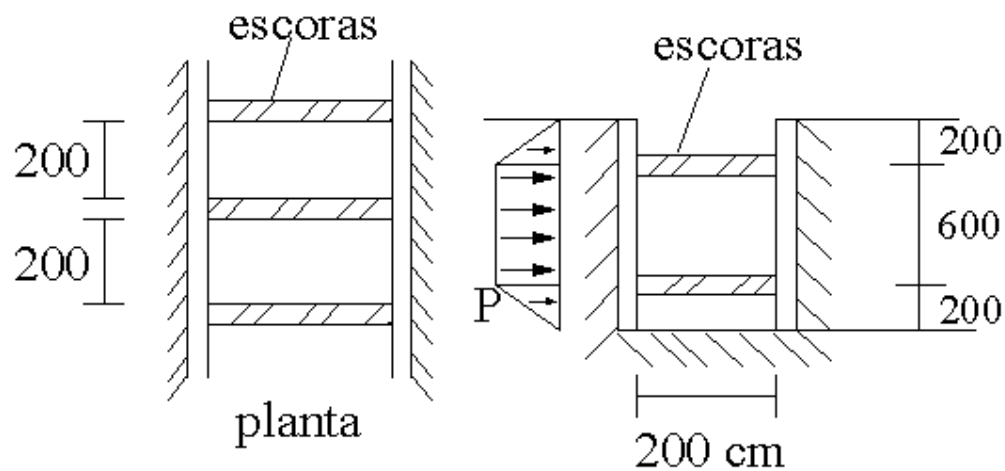
5) Calcular F máximo.

Dados: $\ell = 300 \text{ cm}$; $d = 8 \text{ cm}$; $\bar{\sigma} = 1,2 \text{ tf/cm}^2$; $\sigma_{cr} = \frac{10363000}{\lambda^2}$ para $\lambda > 105$



6) O escoramento da vala é feito com madeira (Peroba Rosa). Sabendo-se que as peças disponíveis para as escoras são 6 cm x 16 cm e 6 cm x 12 cm. Escolher qual das peças é melhor.

Dados: $E = 942,5 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{4 \cdot \lambda^2}$ para $\lambda > 64$; $P = 2 \text{ kN/m}^2$.



Resolução do exercício 3.

Raio de giração:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{272}{48}} = 2,38 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{896}{48}} = 4,32 \text{ cm}$$

Índice de esbeltez:

$$\lambda_z = \frac{\ell_{crz}}{i_z} = \frac{250}{2,38} = 105 \text{ (crítico)}$$

$$\lambda_y = \frac{\ell_{cry}}{i_y} = \frac{250}{4,32} = 58$$

Do gráfico, temos que $\lambda = 80$ para $\sigma_{cr} = 5 \text{ kN/cm}^2$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\gamma \cdot \lambda^2}$$

$$5 = \frac{\pi^2 \cdot 13000}{\gamma \cdot 80^2}$$

$$\lambda = 4$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\gamma \cdot \lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 13000}{4 \cdot 105^2} = 2,91 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 2,91 \cdot 48 = 139,65 \text{ kN}$$

9-BIBLIOGRAFIA

- Beer, Ferdinand Pierre, *Resistência dos Materiais*, São Paulo, ed. McGraw-Hill do Brasil, 1982.
- Féodosiev, V., *Resistência dos Materiais*, edições Lopes da Silva, Posto, 1977.
- Higdon, Archie, *Mecânica dos Materiais*, Rio de Janeiro, ed. Guanabara Dois AS, 1981.
- Langendonck, Telemanco van, *Resistência dos Materiais*, ed. E. Blüncher.
- Mioliubov, I. [et al.], *Problemas de resistencia dos materiais*, ed. Moscou : Mir, 1983.
- Nash, W. A., *Resistência dos Materiais*, ed. McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1975.
- Popov, Egor Paul, *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, São Paulo, ed. E. Blüncher, 1982.
- Schiel, Frederico, *Introdução a Resistência dos Materiais*, fascículo II, São Paulo, 5ª edição, janeiro 1974.
- Timonshenko, S. P., *Mecânica dos Sólidos*, Rio de Janeiro, ed. Livros Técnicos e Científicos, 1983-84.

Obs.: Apostilas de assuntos de Resistência dos Materiais da FEC também são referências bibliográficas.