UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL,ARQUITETURA E URBANISMO

Departamento de Estruturas



TEORIA DAS TENSÕES

PROF DR. NILSON TADEU MASCIA

CAMPINAS, JANEIRO DE 2006

Índice

1. Introdução 2

1.1 Definição de Tensão 2

2. Estado simples ou linear das tensões 4

2.1 Representação Gráfica do Estado simples de tensão - Círculo de Mohr. 6

3. Estado Duplo ou Plano de Tensões 7

4. Tensões Principais 12

5. Tensões máximas de cisalhamento (ou tangenciais) 14

6. Exemplo nº 1 17

7. Representação Gráfica do Estado Plano de Tensões Círculo de Mohr. 20

8. Construção do círculo de Mohr para o estado plano de tensões 23

9. Exercício nº 2 29

10. Estado triplo ou geral ou triaxial de tensões 39

11. Exercício nº 5. 49

12. Aplicação do Estudo de Tensões em Vigas 55

13 - Bibliografia 57

TEORIA DAS TENSÕES

1. Introdução

1.1 Definição de Tensão

O conceito de tensão se origina do conceito elementar de pressão, como, por exemplo, a hidrostática que consiste numa força normal por unidade de área. Por tensão, entende-se uma extensão dessa idéia para os casos em que a força por unidade de área pode não ser, necessariamente, normal.

Como ilustração do conceito de tensão, considera-se um corpo sólido, em equilíbrio, sujeito a um certo número de ações (forças externas), conforme a Fig. 1.

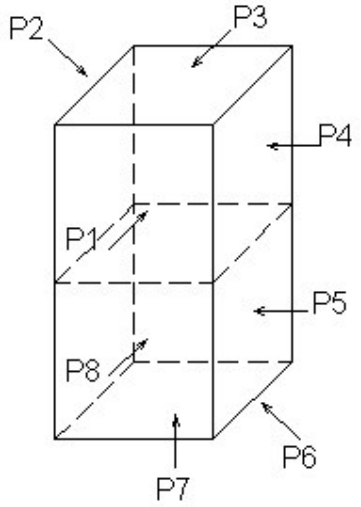

Fig. 1 - Sólido em equilíbrio

Isolando-se uma parte deste sólido, conforme a Fig. 2, o equilíbrio é garantido pelo princípio da ação e reação (Lei de Newton), por se tratar de uma parte de um sólido em equilíbrio.

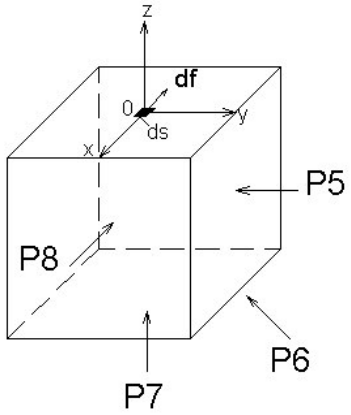

Fig. 2 - Ação e reação no sólido

De maneira geral, pode-se dizer que uma área elementar dS é responsável por uma parcela dF daquelas forças transmitidas (ação e reação). Na Fig. 3 é mostrada a parcela dF segundo suas componentes nos eixos x, y, z, com "origem" no centro da área do elemento dS. O sistema Oxyz é cartesiano.

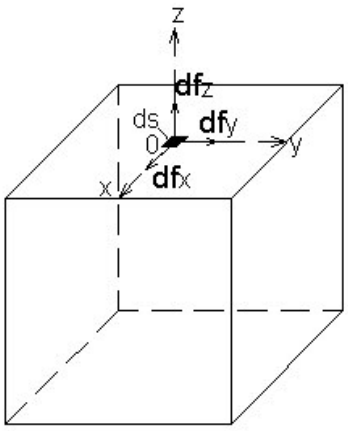

Fig. 3 - Decomposição de força

Dividindo-se as componentes da força pela área elementar dS, definem-se as seguintes grandezas:

$$\sigma_z = \lim_{dS \to 0} \frac{dFz}{dS}$$

$$\tau_{zx} = \lim_{dS \to 0} \frac{dFx}{dS} \qquad (1)$$

$$\tau_{zy} = \lim_{dS \to 0} \frac{dFy}{dS}$$

como pode ser ilustrada na figura 4.

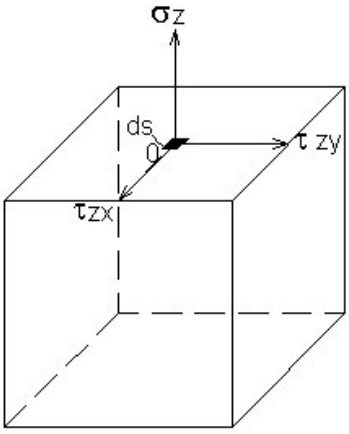

Fig.4 - Tensões num sistema de referência.

Convém observar que, as definições expressas por (1) são colocadas na forma de um processo limite, e essa colocação parte da suposição da existência de continuidade do corpo sólido. Outro fato é que dF pode variar de direção e de sentido ao longo da área S, porém, na passagem ao limite tais características ficam definidas no ponto em consideração (continuidade).

A grandeza σ_z é chamada tensão normal e as grandezas τ_{ZX} e τ_{ZY} são chamadas tensões tangenciais (cisalhantes). Nota-se que nestas grandezas os índices tem o seguinte significado:

τ_{ij} onde,

i = indica o plano normal (tensão normal)
j = indica o eixo (sentido) da tensão tangencial.

2. Estado simples ou linear das tensões

Considerando-se, agora, uma barra sem peso tracionada por uma força axial F igual σ_1 A, conforme a fig. 5.

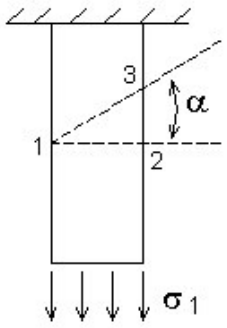

Fig. 5 - Barra tracionada

Numa seção transversal genérica $\overline{1-2}$ aparecem tensões normais σ_1, necessárias para manter o equilíbrio. Num corte oblíquo α, $\overline{1-3}$, temos a seguinte situação:

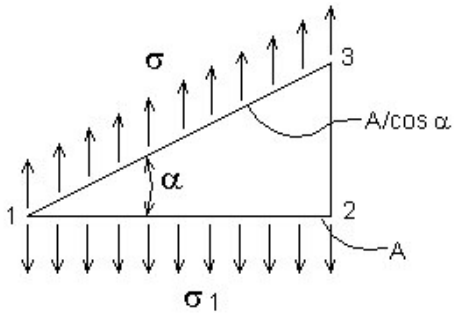

Fig. 6 - Tensões num corte oblíquo.

Na seção $\overline{1-2}$ temos que a força σ A_1 (equilíbrio) deve ser igual a força interna agindo em $\overline{1-3}$. Interessante observar que a área vale, agora A/cos α.

Pode-se, também, exprimir a tensão na seção $\overline{1-3}$ pelas componentes normal σ e a componente tangencial τ, como mostra a fig. 7.

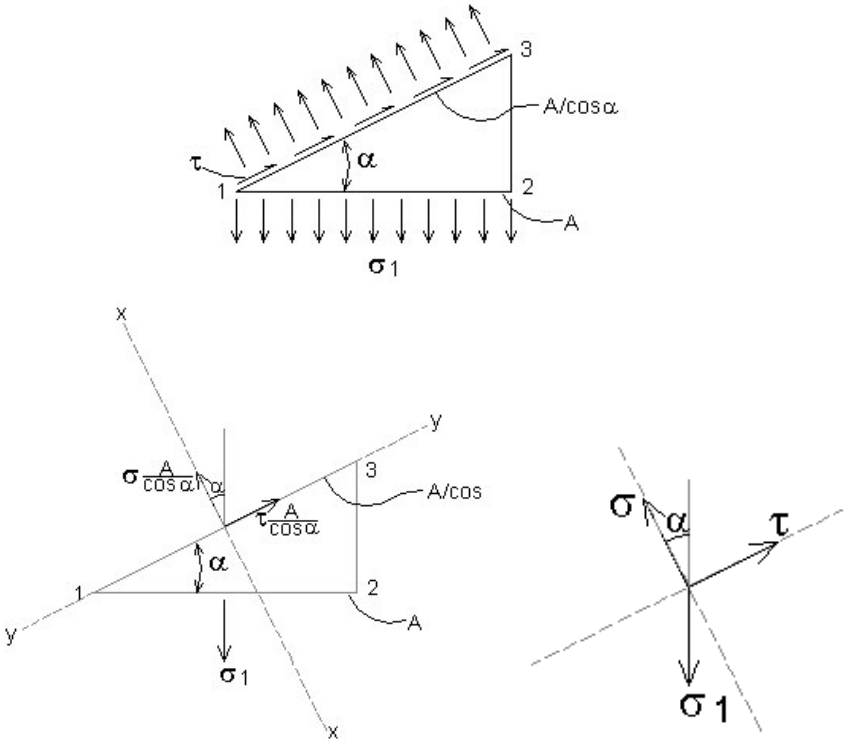

Fig. 7 - Componentes de tensão

Aplicando-se a condição de equilíbrio: somatório das forças igual a zero e considerando-se os eixos das fig. 7 b) tem-se:

eixo x-x :

$$\sigma_1 A \cos \alpha = \frac{\sigma A}{\cos \alpha}$$

$$\therefore \quad \sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha$$

como:

$$\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

e:

$$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$$

vem:

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\therefore \quad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

e daí:

$$\sigma = \sigma_1 \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \text{(I)}$$

eixo y-y :

$$\sigma_1 A \ \ \text{sen}\alpha = \tau \frac{A}{\cos\alpha} \ \ \rightarrow \tau = \sigma_1 \, \text{sen}\alpha \cos\alpha$$

como: senα cosα = sen2α vem:

$$\tau = \sigma_1 \frac{\text{sen}\, 2\alpha}{2} \qquad \text{(II)}$$

Estas duas fórmulas dão a variação das componentes de tensão em função da posição do plano de corte (1-3).

Estas fórmulas permitem uma representação gráfica muito útil, chamada círculo de Mohr (1895), apresentadas a seguir.

2.1 Representação Gráfica do Estado simples de tensão - Círculo de Mohr.

Um estudo simples mostra que as equações I e II representam uma circunferência escrita na forma paramétrica (ou seja, em função de α). Assim:

$$\sigma = \sigma_1 \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tau = \sigma_1 \frac{\text{sen}\, 2\alpha}{2}$$

podem serem escritas da seguinte maneira:

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{2} + \sigma_1 \frac{\cos 2\alpha}{2} \rightarrow \sigma - \frac{\sigma_1}{2} = \sigma_1 \frac{\cos 2\alpha}{2}$$

$$\tau = \sigma_1 \frac{\text{sen}\, 2\alpha}{2}$$

Elevando-se ao quadrado e somando-se tem:

$$(\sigma - \frac{\sigma_1}{2})^2 + \tau^2 = (\frac{\sigma_1}{2})^2 \ \ (\cos^2 2\alpha + \text{sen}^2\, 2\alpha)$$

$$(\sigma - \frac{\sigma_1}{2})^2 + \tau^2 = (\frac{\sigma_1}{2})^2 \qquad \text{(III)}$$

Comparando-se esta equação com a da circunferência, escrita num sistema de eixos (τ,σ) resulta:

$$(\sigma - a)^2 + \tau^2 = b^2$$

sendo: a e b constantes que representam a posição do centro da circunferência e o raio, respectivamente, resulta:

$$a = \frac{\sigma_1}{2} \qquad\qquad b = \frac{\sigma_1}{2}$$

Desta forma, tem-se uma circunferência de ordenadas $(\frac{\sigma_1}{2},\ 0)$ e o raio $\frac{\sigma_1}{2}$, cuja representação num sistema de eixo τ e σ fica:

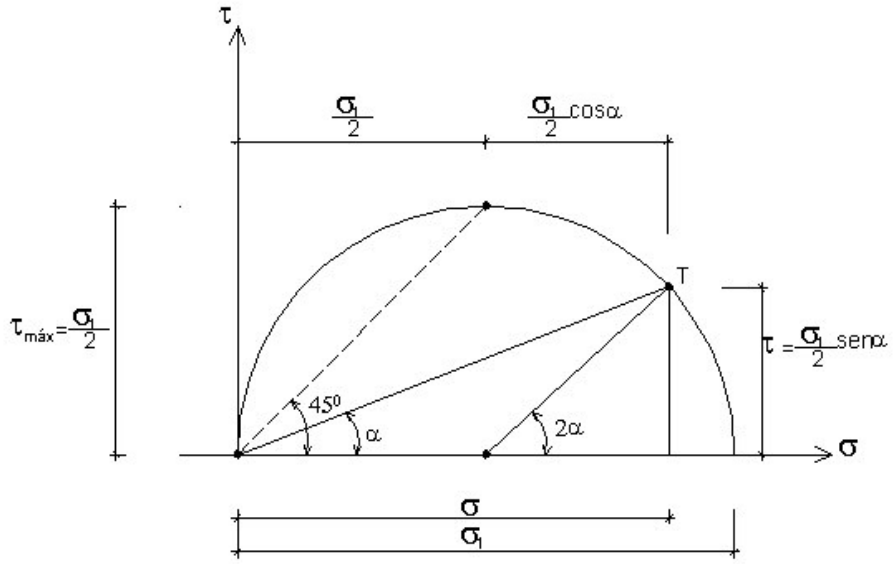

Fig. 8 - Representação de tensões através do Círculo de Mohr

Desta forma análoga, para um ponto genérico T tem-se T(σ, τ), onde a abcissa corresponde a tensão σ e a ordenada a tensão τ.

Podemos, então, tirar importantes conclusões relativas ao estado de tensão em um ponto.

1. A maior tensão normal possível é σ_1 para $\alpha = 0$;
2. A maior tensão tangencial possível é σ_1 e ocorre quando $\alpha = \pm 45º$
3. O raio do círculo vale $\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}$

3. Estado Duplo ou Plano de Tensões

Considera-se, agora, um estado de tensão mais geral num elemento onde não só atua tensão normal em uma direção mas em duas direções. Tal situação é conhecida como tensões biaxiais. Distinguindo-se, assim da tensão em uma direção, ou uniaxial.

As tensões biaxiais aparecem em análise de vigas, eixos, chapas etc. No momento, o interesse é determinar as tensões normais e tangenciais num dado plano de um estado de tensão.

Seja, então, uma chapa retangular com espessura unitária com tensões normais e tangenciais atuando sob esta chapa com uma convenção de sinais definida seguindo a Fig. 9

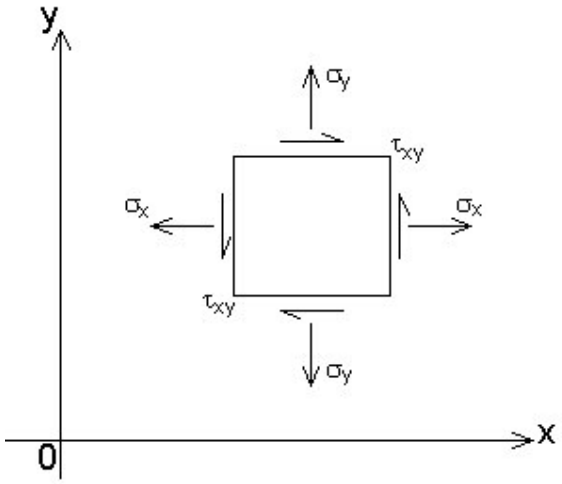

Fig. 9 - Tensões no estado Plano

Tensão Normal:

$\sigma > 0 \rightarrow$ TRAÇÃO
$\sigma < 0 \rightarrow$ COMPRESSÃO

Tensão Tangencial:

Escolhe-se uma face, se σ for de tração e concordar com o eixo x ou y para ser positivo. Caso σ seja de compressão e concordar com o eixo x ou y, τ para ser positivo, terá de discordar do sentido positivo de x ou de y.

De um modo geral, o objetivo do estudo é obter as tensões normais e/ou tangenciais em um plano genérico que corta a chapa numa direção qualquer.

Graficamente temos:

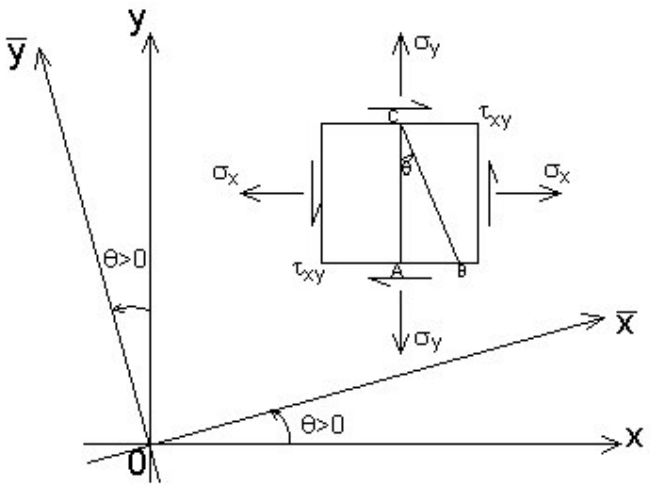

Fig. 10 - Tensões no estado Plano

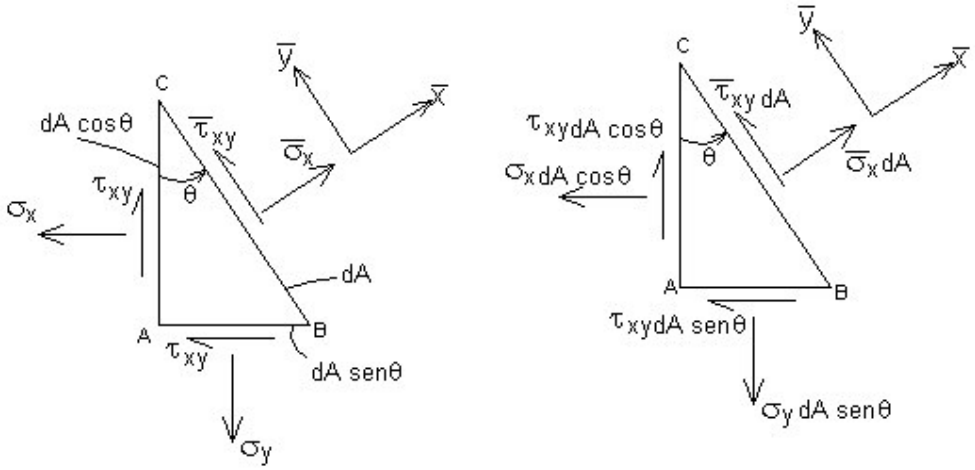

Fig. 11 - Tensões no estado plano

Obs: Teorema de Cauchy: este teorema garante a igualdade de tensões tangenciais em planos normais entre si. Assim por equilíbrio de momentos no C.G. da chapa

$$(\tau_{xy}\, dy.1)dx = (\tau_{yx}\, dx.1)dy$$

$$\therefore \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Analisando agora o equilíbrio de forças na região $\overline{ABC}$, pela transformação das tensões atuantes em forças temos a seguinte situação:

$$\sum \overline{F}_x = 0 \rightarrow \overline{\sigma}_x dA = \sigma_x dA \ \cos\theta\cos\theta + \tau_{xy} dA \ x$$

$$x \ \ \text{sen}\theta \ \ \cos\theta + \sigma_Y \ \ dA \ \ \text{sen}\theta\,\text{sen}\theta$$

$$\bar{\sigma}_x \, dA = \sigma_x \, dA \cos^2\theta + \sigma_y \, dA \, \operatorname{sen}^2\theta + \tau_{xy} dA \, \operatorname{sen} 2\theta$$

ou:

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

ou:

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \sigma_y \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

e finalmente:

$$\bar{\sigma}_x = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

Analogamente:

$$\sum \bar{F}y = 0 \rightarrow \bar{\tau}_{xy} dA \;\; \cos\theta \cos\theta - \sigma_x \;\; dA \;\; \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \sigma_y \;\; dA \;\; \operatorname{sen}\theta \cos\theta - \tau_{xy} dA \;\; \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

ou:

$$\bar{\tau}_{xy} dA = -\sigma_x \;\; dA \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \sigma_y \;\; dA \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \tau_{xy} (\cos\theta^2 - \operatorname{sen}\theta)^2$$

ou:

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{\sigma_y-\sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Estas equações são as expressões gerais para tensão normal e tangencial, respectivamente, em qualquer plano definido pelo ângulo 0 e provocadas por um elenco de tensões conhecidas.

Essas equações também podem ser retratadas como as expressões de transformação de tensão de um conjunto de eixos coordenados a outro (no caso (x.y) para ($\bar{x}$ e $\bar{y}$).

Sinteticamente: conhece-se σ_x, σ_y e τ_{xy} e se quer:

$$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y \;\; e \;\; \bar{\tau}_{xy}$$

Para o cálculo de $\bar{\sigma}_y$ utiliza-se o ângulo:

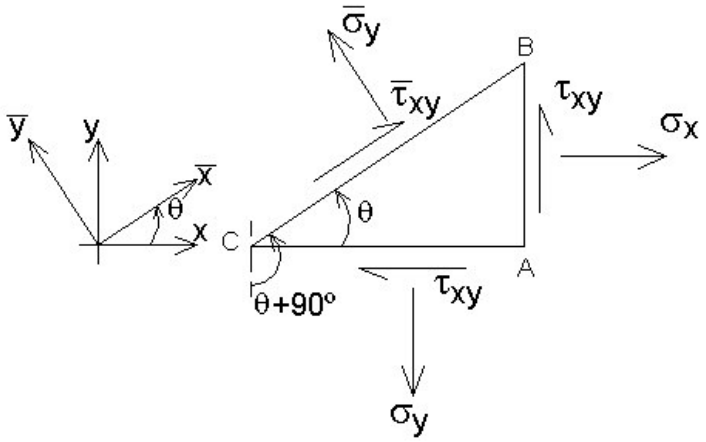

Fig. 12 - Tensão $\bar{\sigma}_y$

$\alpha = \theta + 90º$, substituindo-se na equação de $\bar{\sigma}_x$.

Assim:

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_x \cos^2(\theta + 90^\circ) + \sigma_y \operatorname{sen}^2(\theta + 90^\circ) + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2(\theta + 90^\circ)$$

ou

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_x \ \operatorname{sen}^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

e finalmente:

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_y + \sigma_x)}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

Pode-se colocar as expressões de transformação de coordenadas na forma matricial, escrevendo:

$$[\bar{\sigma}] = [M] \ [\sigma] \ [M]^T$$

onde:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_y \end{bmatrix} \qquad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

sendo [M] a matriz de transformação e $[M]^T$ a sua transposta.

4. Tensões Principais

Freqüentemente, no estudo das tensões, o interesse está voltado para a determinação da maior e da menor tensão, dadas pelas expressões de $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ e $\bar{\tau}_{xy}$ (caso plano) e, também, em que planos ocorrem tais tensões.

Para isto se faz:

$$\bar{\tau}_{xy} = 0 \rightarrow \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$\therefore \quad tg\, 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

ou:

$$\frac{d\bar{\sigma}x}{d\theta} = 0 \rightarrow -2\frac{\sigma x - \sigma y}{2} \cos 2\theta + 2 \quad \tau xy \quad \operatorname{sen} 2\theta = 0$$

$$\therefore \quad tg\, 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

assim concluímos que:

θ_1 = é o ângulo que determina qual o plano onde atuam as tensões máximas.

$2\theta_1$ = pode ser dois valores e estes se defasam de 180 °. Num certo valor de θ'_1 atua a máxima tensão normal e noutro valor θ''_1 defasado de 90 ° atua a mínima tensão normal. Para saber qual o plano em que atua uma determinada tensão, por exemplo σ_1, basta substituir na fórmula $\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_x \operatorname{sen} 2\theta$, o valor de θ por θ_1 e determinar o $\bar{\sigma}_x$ e comparar com σ_1 e σ_2, se der $\bar{\sigma}_x = \sigma_1$ então θ_1 indica o plano de σ_1.

Para θ_1 que determina as máximas tensões normais as tensões tangenciais são nulas.

Os planos em que atuam as máximas tensões são chamados de planos principais de tensão e as tensões máximas são chamadas tensões principais.

Análise Gráfica de tg θ_1

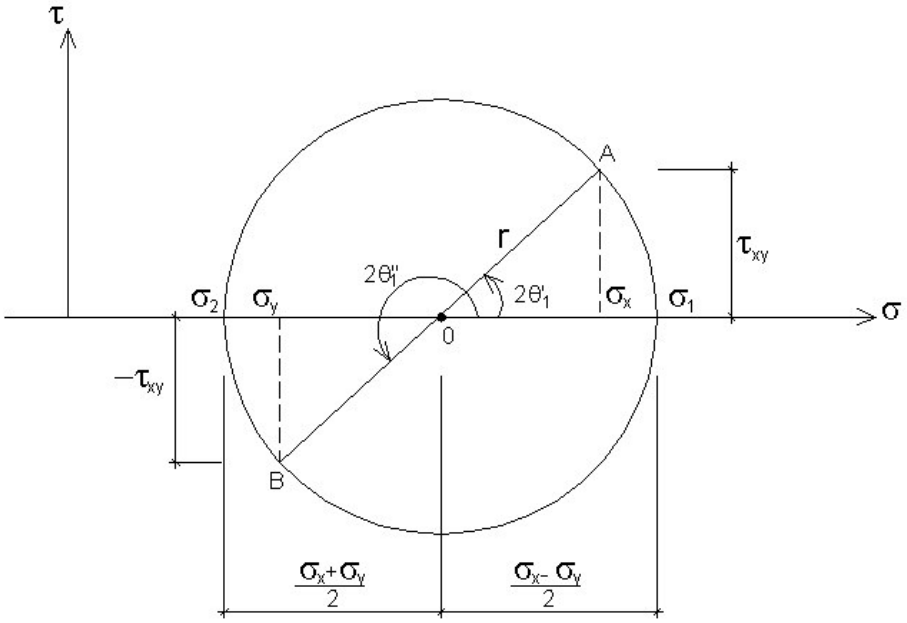

Fig. 13 - Análise gráfica de tg θ_1

Assim:

$$\sqrt{1/4(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \sqrt{r^2}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta'_1 = -\operatorname{sen} 2\theta'_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{(1/4(\sigma x - \sigma y)^2 + \tau^2 xy}} = -\frac{\tau xy}{r}$$

$$\cos 2\theta' = -\cos 2\theta' = \frac{1/2(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(1/4(\sigma x - \sigma y)^2 + \tau^2 xy}} = -\frac{1/2(\sigma_x - \sigma_y)}{r}$$

substituindo-se em

$$\overline{\sigma x} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

vem:

$$\overline{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\frac{1}{2}\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{r} + \frac{\tau_{xy}(\tau xy)}{r}$$

$$\therefore \overline{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \frac{\tau^2 xy}{r}$$

$$\frac{1}{r}[(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2]=\frac{1}{\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2}}((\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}{}^2)$$

onde:

$$r=\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau^2{}_{xy}}$$

daí:

$$\bar{\sigma}_x=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{2}}+\tau^2{}_{xy}$$

São as tensões principais.

e:

$$\bar{\sigma}_x \begin{cases} \sigma_1 \text{ - tensão máxima} \\ \sigma_2 \text{ - tensão mínima} \end{cases}$$

5. Tensões máximas de cisalhamento (ou tangenciais)

Fazendo-se um estudo análogo ao das tensões principais, a tensão tangencial em qualquer plano θ é dada por:

$$\bar{\tau}_{xy}=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\operatorname{sen}2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta$$

se fizermos: $\frac{d\bar{\tau}_{xy}}{d\theta}=0$ temos que:

$$tg\ \ 2\theta_2=-\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

assim θ_2 indica qual plano a tensão tangencial é máxima ou mínima.
Concluímos, desse modo que:

$2\theta_2$ tem dois valores e chamando de θ'_2 e θ''_2 , estes valores estão defasados de 90 º.

Comparando-se tg $2\theta_1$, e tg $2\theta_2$ temos que:

$$\frac{1}{tg2\theta_1}=tg2\theta_2\rightarrow cotg2\theta_1=-tg2\theta_2$$

daí: $2\theta_1$ e $2\theta_2$ diferem de 90 º.

Assim os planos de máxima tensão tangencial estão a 45 º dos planos principais de tensão.

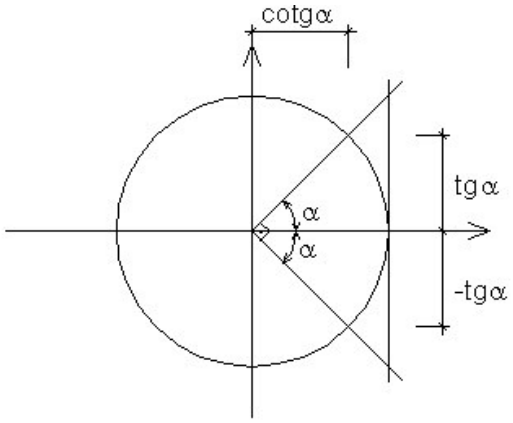

Fig. 14 - Tensões máximas de cisalhamento.

substituindo-se $tg2\theta_2 = -\frac{(\sigma x - \sigma y)}{2\tau xy}$ em $\bar{\tau}xy$ tem-se:

$$\tau_{\substack{\max \\ \min}} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + (\tau_{xy})^2}$$

Dessa forma a máxima tensão tangencial difere da mínima apenas pelo sinal. Do ponto de vista físico esses sinais não tem significado e por esta razão a maior tensão tangencial será chamada de tensão máxima tangencial ou de cisalhamento.

Ao contrário das tensões principais, para as quais não existem tensões de cisalhamento (tangenciais), as máximas tensões de cisalhamento atuam em planos não livres de tensões normais.

Tomando-se a equação:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \quad \text{sen}\, 2\theta$$

e aplicando

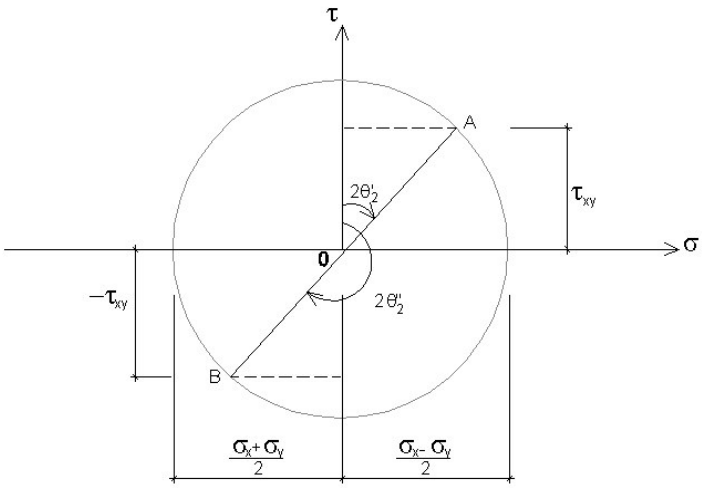

Fig. 15 - Análise gráfica de tensões normais e tangenciais

Assim:

$$\overline{OA} = \sqrt{\frac{(\sigma x - \sigma y)^2}{2} + \tau^2 xy} = \sqrt{r}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta_2 = \pm \frac{\sigma x - \sigma y}{2} / \sqrt{r} \quad \cos 2\theta_2 = \pm \frac{\tau xy}{2} / \sqrt{r}$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} + \frac{\sigma x - \sigma y}{2} \cdot \frac{\tau xy}{\sqrt{r}} + \tau_{xy} \frac{\sigma x - \sigma y}{2\sqrt{r}}$$

temos:

$\bar{\sigma} x = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}$, tensões normais.

Obs1: Determinação de τ_{max} em $\bar{\tau}_{xy}$ tem-se que:

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{\sigma y - \sigma x}{2} \frac{(\sigma x - \sigma y)}{2} + \tau xy \quad \tau xy \sqrt{r}$$

e:

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{(\sigma x - \sigma y)^2}{2} / \sqrt{r} + \tau^2 xy / \sqrt{r}$$

$$\therefore \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{\sqrt{r}} [\frac{(\sigma x - \sigma y)^2}{2} + \tau^2 xy]$$

se:

$$\frac{1}{\sqrt{r}}.r = \sqrt{r} \rightarrow \bar{\tau}xy = +\sqrt{\frac{(\sigma x - \sigma y)^2}{2} + \tau xy^2}$$

Obs2: Se σ_1 e σ_2 são tensões principais então:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{xy}^2}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2} + \tau_{y}^2} = \tau_{max}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

6. Exemplo nº 1

Um elemento está sujeito as seguintes tensões planas:
σ_x = 160 kN/cm^2 , σ_y = 60 kN/cm^2 e τ_{xy} = 40 kN/cm^2 , como mostra a figura:

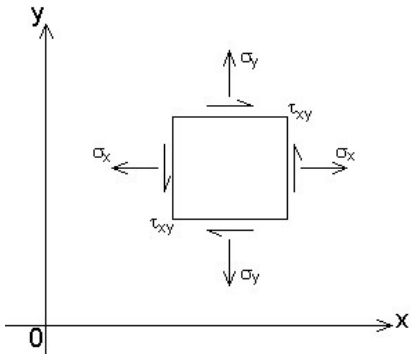

Fig. 16 - Estado de tensão no elemento.

Calcular:

a) as tensões e os planos principais
b) as tensões que atuam no elemento a 45 º
c) as tensões máximas de cisalhamento

Mostrar cada resultado em um diagrama.

SOLUÇÃO: Em primeiro lugar suponhamos ser este elemento de uma chapa ou de uma viga para um melhor entendimento.

a) Definição dos planos principais:

Utilizando-se de: $tg2\theta_1 = \frac{2\tau xy}{\sigma x - \sigma y}$, resulta que:

$$tg2\theta_1 = \frac{2.40}{160-60} = 0{,}80 \rightarrow \begin{matrix}\theta_1' = 19^\circ\ 20' \\ \theta_1'' = 109^\circ\ 20'\end{matrix}$$

Tensões Principais

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y\, sen\theta^2 + \tau_{xy}\, sen2\theta$$

1)

$$\theta = \theta'_1 = 19^\circ\ 20'$$

$$\bar{\sigma}x = 160\ \ \cos^2(19^\circ\ 20') + 60\ \ sen^2(19^\circ 20') + 40\ \ sen(2\ \ x\ \ 19^\circ 20')$$

$$\bar{\sigma}_x = 174{,}0\ \ kN/cm^2$$

2)

$$\theta = \theta_1'' = 109^\circ\ 20'$$

$$\bar{\sigma}x = 160\ \ \cos^2(109^\circ 20') + 60\ \ sen^2(109^\circ 20') + 40\ \ sen(2x109^\circ 20')$$

$$\bar{\sigma}_y = 45{,}96\ \ kN/cm^2$$

Conclusão:

$$\sigma_1 = 174{,}0\ kn/cm^2$$
$$\sigma_2 = 45{,}96\ kn/cm^2$$

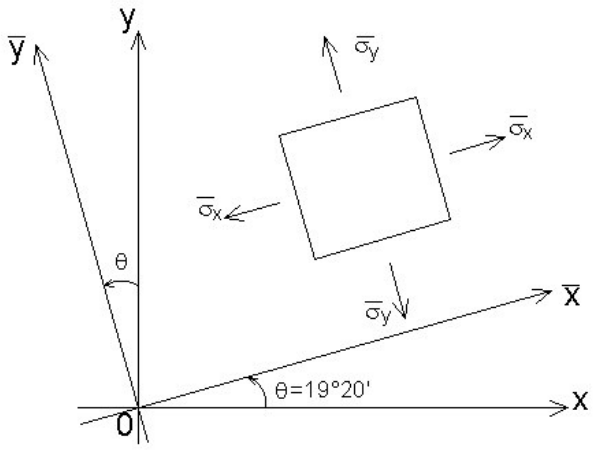

Fig. 17 - Tensões e direções principais

b) as tensões no elemento a 45 º

Utilizando-se a mesma expressão de a)

b1) para θ = 45º

$$\bar{\sigma}_x = 160 \ \cos^2 45^\circ + 60 \ \operatorname{sen}^2 45^\circ + 40 \ \operatorname{sen} \ 2x45^\circ$$

$$\bar{\sigma}_x = 150 \ \ kN/cm^2$$

para θ = 135º

$$\bar{\sigma}_y = 160 \ \cos^2 135^\circ + 60 \ \operatorname{sen}^2 135^\circ + 40 \ \operatorname{sen} \ 2x135^\circ$$

$$\bar{\sigma}_y = 70 \ \ kN/cm^2$$

b2) $\bar{\tau}_{xy} = \frac{\sigma y - \sigma x}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$

com θ = 45º

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{60-160}{2} = 50 \ \ kN/cm^2$$

Esquematicamente:

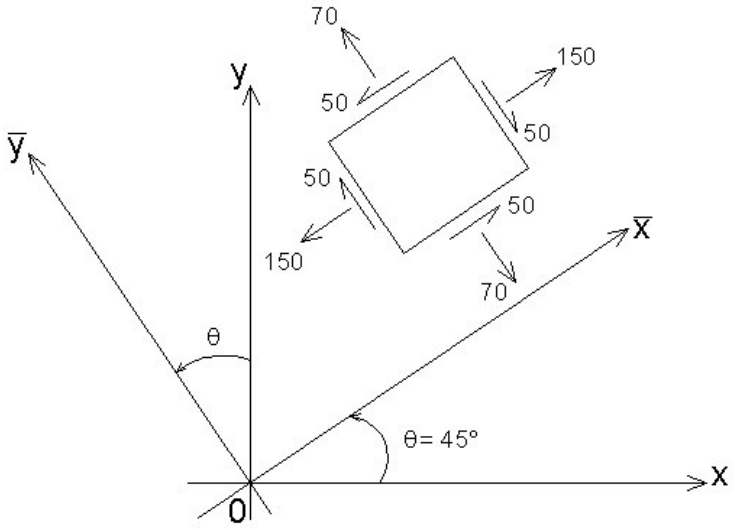

Fig. 18 - Tensões à 45º

c) Tensões máximas cisalhantes (tangenciais)

$$tg \ \ 2\theta 2 = -\frac{(\sigma x - \sigma y)}{2\tau xy} = -\frac{(160-60)}{2x40} = -1{,}25$$

daí:

$$2\theta_2 = 128^\circ 40' \rightarrow \theta'_2 = 64^\circ 20' \rightarrow \theta''_2 = 154^\circ 20'$$

$$\bar{\sigma}_x = 160 \ \cos^2 64^\circ 20' \ + \ 60 \ \operatorname{sen}^2 64^\circ 20' \ + \ 40 \ \operatorname{sen} 2 \ x \ 64^\circ 20'$$

$$\therefore \bar{\sigma}_x = 110 \ \ kN/cm^2$$

$$\bar{\sigma}_y = 110 \ \ kN/cm^2$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{60-160}{2} \operatorname{sen} \ 128^\circ 40' \ + \ \tau_{xy} \cos \ 128^\circ 40'$$

$$\therefore \bar{\tau}_{xy} = -64 \ \ kN/cm^2$$

Esquematicamente:

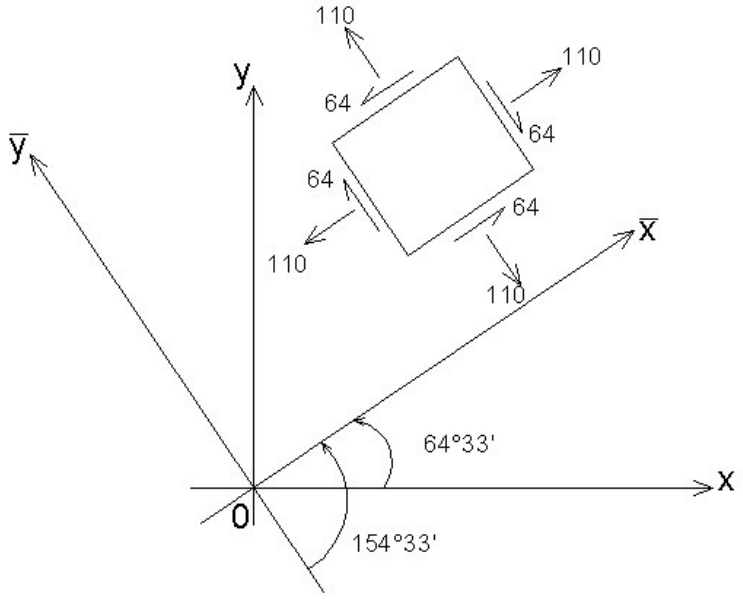

Fig. 19 - Tensões máximas de cisalhamento.

7. Representação Gráfica do Estado Plano de Tensões Círculo de Mohr.

Neste item serão reexaminadas as equações de $\bar{\sigma}_x$ e $\bar{\tau}_{xy}$ a fim de interpretá-las graficamente. Os objetivos básicos são dois: primeiro, com a interpretação gráfica dessas

equações será atingido uma melhor compreensão do problema geral da transformação de tensão; segundo, com a ajuda da construção gráfica, é possível obter, freqüentemente, uma solução mais rápida para os problemas de transformação de tensão.

Do mesmo modo, sua análise do estado simples de tensão, as equações:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{(\sigma x-\sigma y)}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} \quad \text{sen } 2\theta$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \quad \cos 2\theta$$

representam a equação de um "círculo" (circunferência) na forma paramétrica em termos de θ, num sistema (σ, τ).

Daí:

$$\begin{cases} \bar{\sigma} - \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \dfrac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen } 2\theta \\ \bar{\tau}_{xy} = -\dfrac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \quad \cos 2\theta \end{cases}$$

Elevando-se ao quadrado e somando-se as equações acima tem-se:

$$\left(\bar{\sigma}_x - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + (\bar{\tau}_{xy})^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2{}_{xy}$$

Portanto:

Posição do centro do "círculo": $\left(\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \;,\; 0\right)$

Raio do círculo ao quadrado: $\dfrac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{2} + \tau^2{}_{xy} = R^2$

Temos num sistema de eixos (σ, τ) a representam gráfica, através do círculo de Mohr, das tensões normais e tangenciais num plano genérico θ.

Esquematicamente:

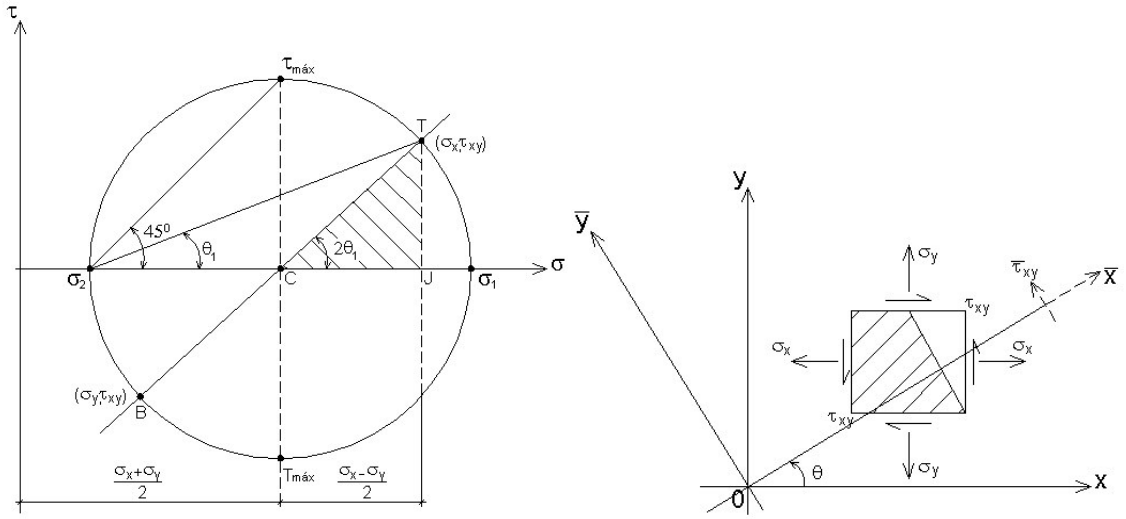

Fig. 20 - Representação do círculo de Mohr

Assim, para um círculo de Mohr com base nas advindas pela figura acima, parte (a), temos:

- O centro está totalizado em $[(\sigma_x + \sigma_y)/2,0]$ e raio igual a r calculado.
- O ponto T do círculo corresponde às tensões na face direita do elemento dado, quando $\theta = 0º$. Para esse ponto $\bar{\sigma}_x = \sigma_x$ e $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}$. Da figura (b) no triângulo TCJ temos que $\frac{TJ}{CI} = \tau_{xy} / [(\sigma_x - \sigma_y)/2]$, portanto, o ângulo TCJ é igual a $2\theta_1$
- Com $\theta = 90º$ $\bar{x}$ passa a direcionar-se na vertical e $\bar{y}$ aponta para esquerda. Com estas coordenadas $\sigma x = \sigma y$ e $\tau xy = - \tau xy$, temos o ponto B do círculo

As coordenadas T e B satisfazem a equação do círculo.

O mesmo procedimento pode ser feito para outros pontos correspondentes e outras tensões. Dessa forma, podem ser realizados importantes conclusões, enumeradas a seguir, do círculo de mohr, relativas ao estado plano de tensões em um ponto:

- A maior tensão normal possível é σ_1 ; a menor é σ_2, ambas para $\theta = 0º$ e com a tensão tangencial igual a zero.
- A maior tensão de cisalhamento τ_{max} é numericamente igual ao raio do círculo $(\sigma_1 - \sigma_2) / 2$
- Se $\sigma_1 = \sigma_2$ o círculo de Mohr passa a um ponto, e não se desenvolve tensões tangenciais.
- Se $\sigma_x + \sigma_y = 0$ o centro do círculo de Mohr coincide com a origem de coordenadas σ - 2, e existe um estado de cisalhamento puro
- A soma de tensão normais em quaisquer dos planos mutualmente normais é invariante, isto é,

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y = \text{constante (INVARIANTE DE TENSÃO)}$$

8. Construção do círculo de Mohr para o estado plano de tensões

Regras Práticas, conceito de polo e determinação de cálculo de tensões em um plano genérico.

Seja o seguinte estado plano de tensão:

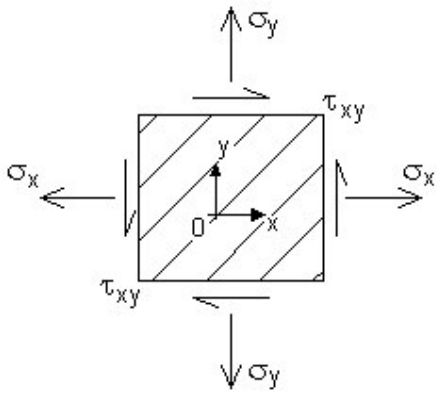

Fig. 21 - Estado de tensão

Para traçar o círculo de Mohr, via regra prática, considera-se os seguintes itens:

1 - Estabelecer um sistema de coordenadas do tipo:

σ - eixo horizontal
τ - eixo vertical sem circulação

2 - Colocar no sistema de eixo σ, τ os pontos Tx e Ty cujas coordenadas são os valores (σ_x , τ), (σy, τ) da seguinte maneira:

a) Percorrendo-se o elemento no sentido de τ encontraremos o primeiro par (σ_x , τ_{xy}) e marca-se a abcissa de σ_x de acordo com o seu sinal ($\sigma > 0 \rightarrow$ tração, $\sigma < 0 \rightarrow$ compressão). A ordenada τ_{xy} deve ser alocada para cima ou para baixo conforme orientação no elemento. Temos então Tx

b) Pecorrendo-se o elemento no sentido de giro de τ vamos encontrar outro par. (σ_y , τ_{xy}) ou seja o ponto Ty. Aloca-se σ_y de acordo com seu sinal e τ_{xy} será alocado em posição oposta a τ_{xy} do ponto Tx em relação ao eixo σ.

3. Com Tx e Ty acham-se o centro da circunferência e a desenha.

Esquematicamente:

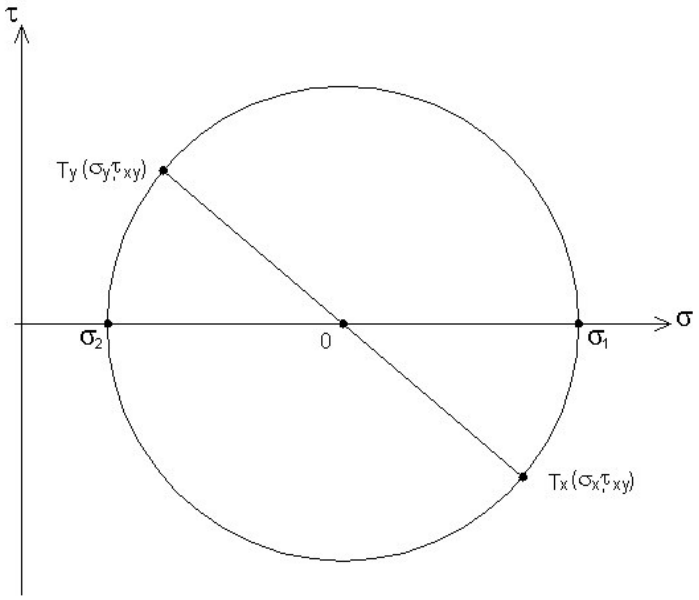

Fig. 22 - Círculo de Mohr

4. Posição do Polo

Polo é um ponto P do círculo de Mohr, que se por este ponto se traçar uma reta paralela a direção de um plano qualquer no elemento em questão, onde se deseja saber as tensões atuantes. Esta reta cortará o círculo num ponto, que representa σ_e τ atuantes naquele referido plano. A localização de P é simétrica a Tx ou Ty, se este ou aquele for o primeiro par.

Regra Prática

Escolhe-se um eixo σ paralelo a uma das bordas do elemento e percorre-se, no sentido do eixo deste eixo, o desenho do elemento. O primeiro τ encontrado indica a ordenada τ a ser colocada para se obter T, o polo P está em posição oposto.

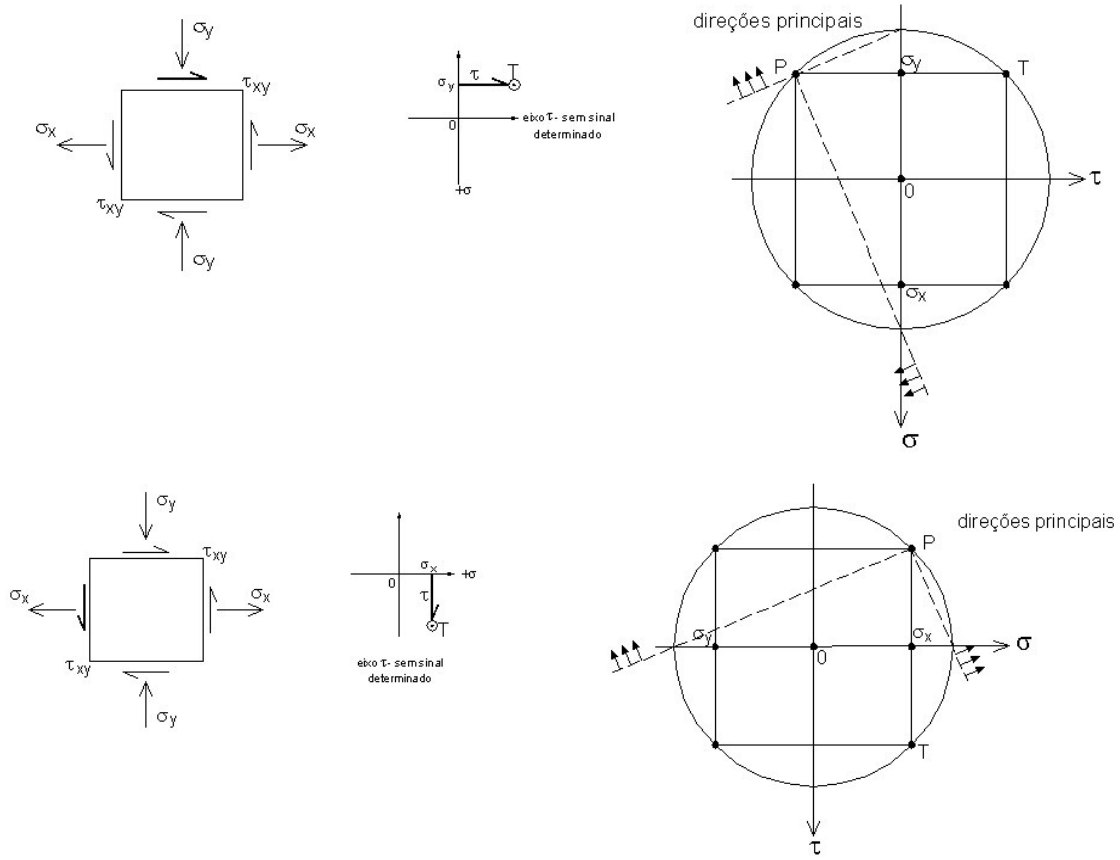

Fig. 23 - Exemplo: Determinação das P e das direções principais.

No esquema precedente pode-se determinar as direções principais através do ponto P.

Uma explicação geométrica desta teoria se baseia no seguinte desenho.

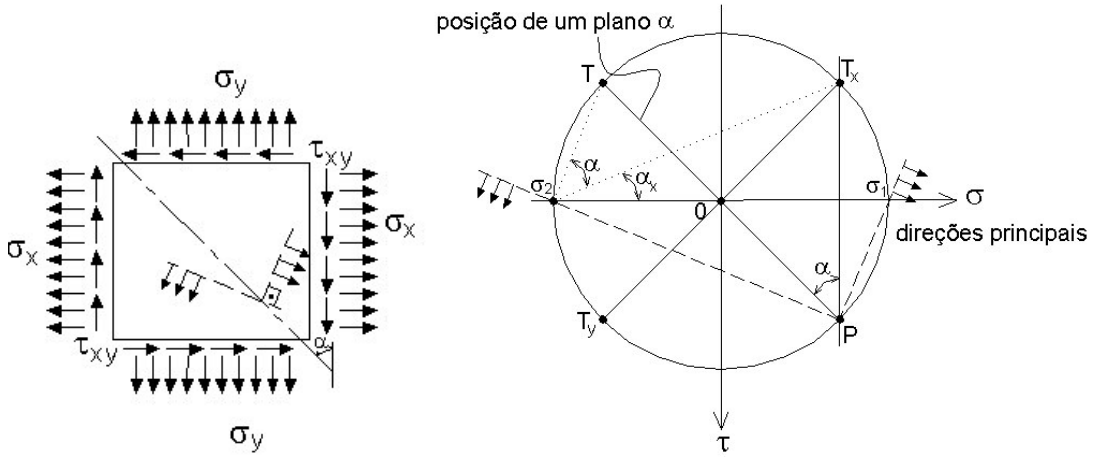

Fig. 24 - Direções principais

5. Pode-se colocar os elementos importantes do estado plano da tensão no desenho construído, ficando então.

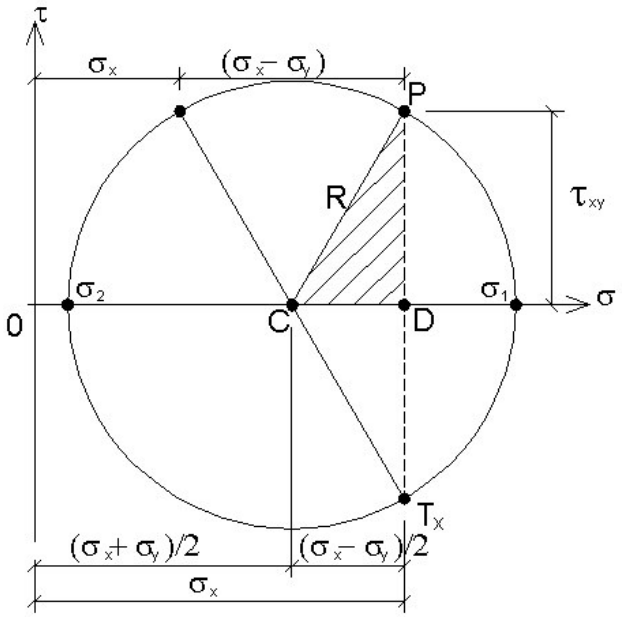

Fig. 25 - Elementos importantes no círculo de Mohr

Obs: Considerações a respeito do Polo

Adota-se τ sem sinal ou sentido. Para $\sigma_x < 0$ (compressão) pode-se adotar um eixo σ com um determinado sentido.

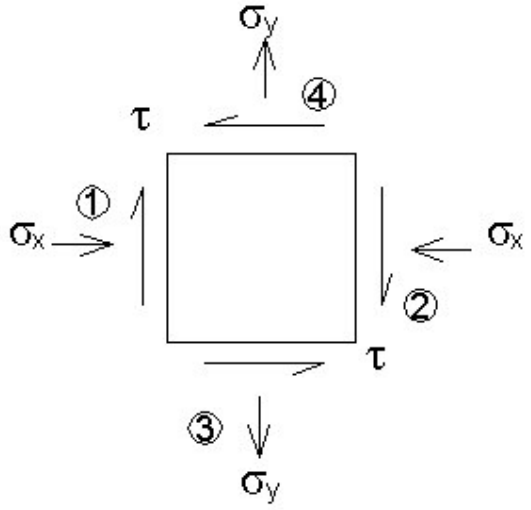

Fig. 26 - Orientação de eixos

Coloca-se o ponto Tx($-\sigma_x$; τ) seguindo a orientação do τ desta face(1). Coloca-se então o Polo P em posição simétrica com relação ao eixo σ. A seguir coloca-se o ponto Ty de tal maneira que a distância Tx - Ty seja o diâmetro do círculo.

Traça-se o círculo. Por P traça-se retas até os pontos de interseção com do círculo com o eixo σ. Nestes pontos tem-se σ_1 σ_2 e os planos das direções principais.

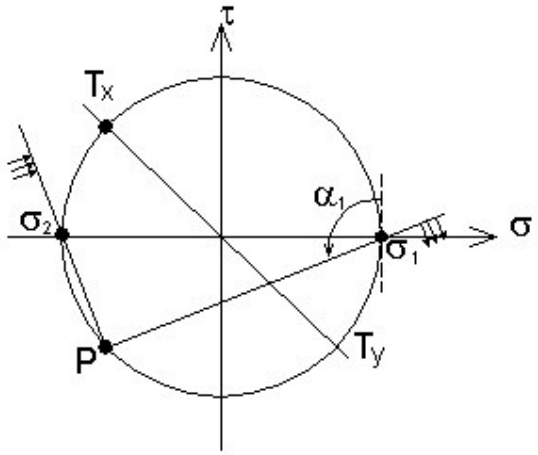

Fig. 27 - Posição do polo. Face (1).

O ângulo α_1 é tirado no sentido anti-horário da vertical por σ1 até a reta P-σ1. As tensões σ_1 e σ_2 são normais a estas respectivas retas.

Face 2
O eixo σ tem sentido de $\sigma_x < 0$

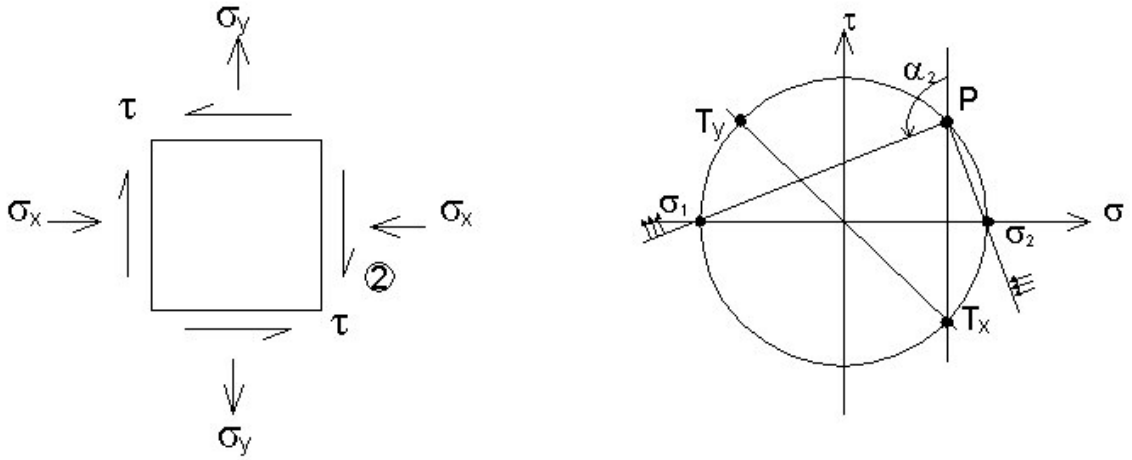

Fig. 28 - Posição do polo. Face (2).

Face 3
σ tem sentido para cima pois $\sigma_y > 0$ (tração)

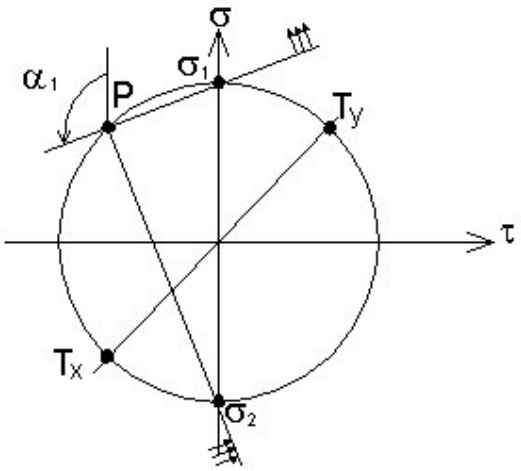

Fig. 29 - Posição do Polo. Face (3).

Face 4

σ tem sentido para baixo pois $\sigma_y > 0$ (tração)

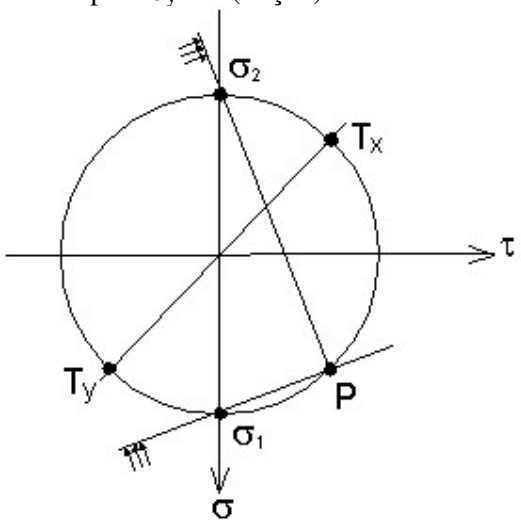

Fig. 30 - Posição do polo. Face (4)

Notar que qualquer sentido de entrada para se desenhar o círculo de Mohr (qualquer face) nas direções das retas P-σ1 e P-σ2 são sempre paralelas.

Para o elemento de chapa tem-se, desse modo, o seguinte desenho:

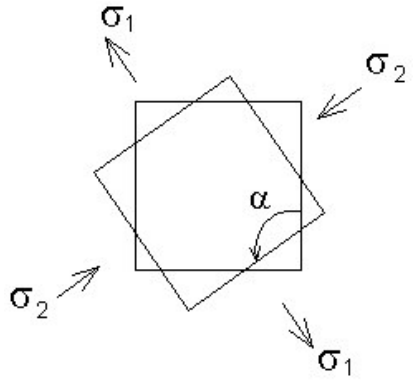

Fig. 31 - Conclusão final.

Sob esta ótica, basta escolher um sentido de entrada no elemento, geralmente aquele em que se conhece as tensões normal e tangencial, e desenha-se o círculo de Mohr.

9. Exercício nº 2

Considerando-se os seguintes estados planos de tensão.

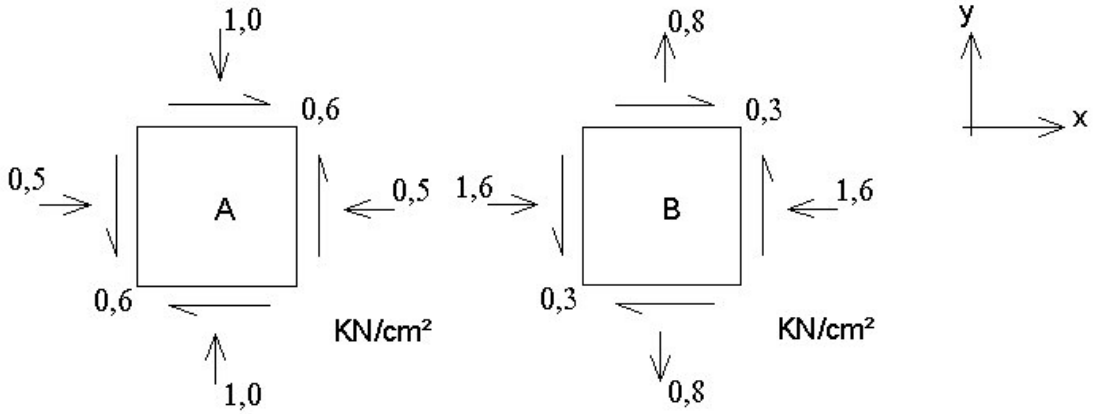

Fig. 32 - Estados de tensão

Determinar as tensões principais e os planos que elas atuam.

Solução: a) utilizando-se as expressões do estado plano de tensões:

$$\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\Bigg\{\ \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

Para o estado A

$$\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix} \Rightarrow \frac{0,5-1,0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0,5+1,0}{2}\right)^2+0,6^2} \Rightarrow \begin{matrix}0,71\\ -1,21\ \ (kN/cm^2)\end{matrix}$$

$$tg\ \ 2\theta_1 = \frac{2\ .\ 0,6}{0,5+1,0} = 0,8 \Rightarrow \frac{2\theta_1 = 38^\circ,65}{\theta'_1 \cong 19^\circ,32} \quad \text{e} \quad \theta'_1 = 19^\circ,32$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_1 \qquad \bar{\sigma}_x = \sigma_2$$

Para o estado B

$$\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix} > \frac{-1,6+0,8}{2} \pm \sqrt{\frac{(-1,6-0,8)^2}{2}+0,3^2} < \begin{matrix}0,83\ \ kN/cm^2\\ -1,63\ \ kN/cm^2\end{matrix}$$

$$tg\ 2\theta_1 = \frac{2\ x0{,}3}{-16-0{,}8} = -0{,}25 \Rightarrow 2\theta_1 = 14^\circ{,}03$$

$$\overline{\theta_1 = -\ 7^\circ{,}01} \qquad \overline{\theta_1" \cong\ 83^\circ}$$
$$\overline{\sigma_x = \sigma_2} \qquad \overline{\sigma_x = \sigma_1}$$

b) Utilizando-se o Círculo de Mohr

* Para o Estado A

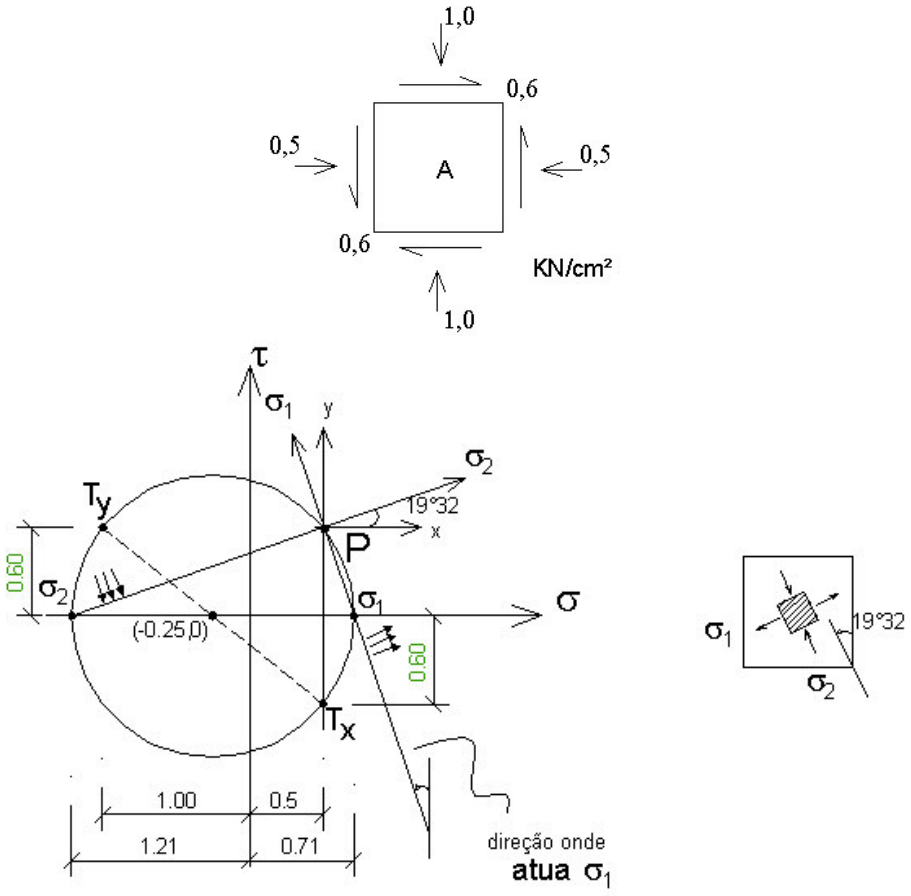

Fig. 33 - Tensões no Estado A

Obs: Para saber se θ_1 indica o plano de atuação de σ_1 ou σ_2 , basta substituir em $\overline{\sigma}_x$ e comparar se $\overline{\sigma}_x = \sigma_1$ ou $\overline{\sigma}_x = \sigma_2$ Pelo círculo de Mohr o resultado é imediato.

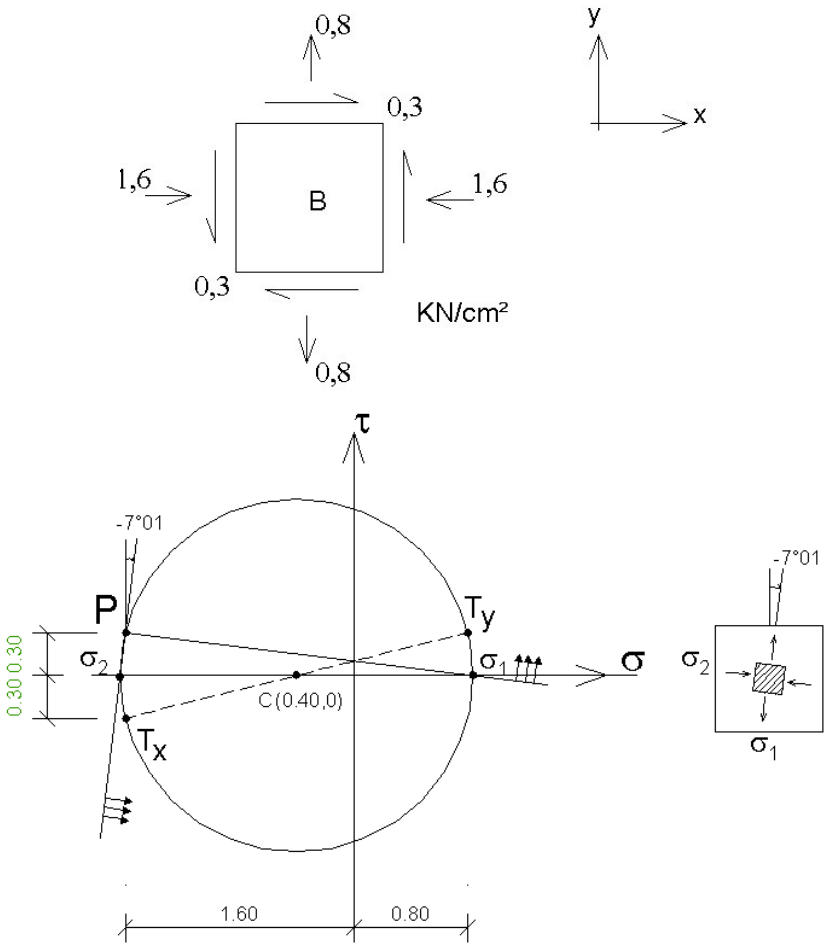

Fig. 34 - Tensões no Estado B.

Exercício nº 3

Nos cortes indicados ocorrem as seguintes tensões normais

$$\sigma_I = 10 \;\; kN/cm^2 \;\; \sigma_{II} = 0 \;\; \sigma_{III} = -10 \;\; kN/cm^2$$

Calcular:

a) tensão tangencial no corte II
b) os ângulos que os cortes principais formam com o corte I

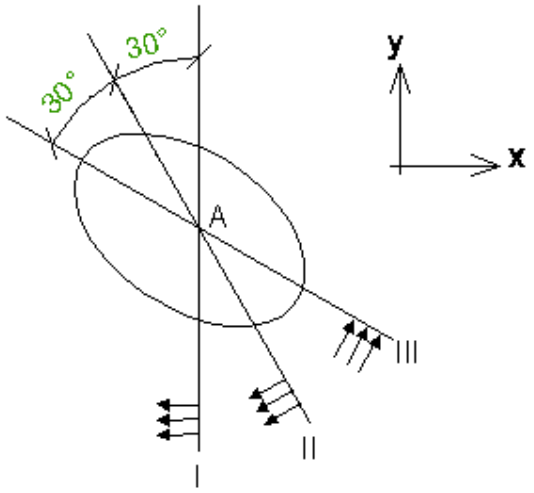

Fig. 35 - Planos de cortes

Solução: Para se determinar as tensões normais e tangenciais em qualquer plano que passe por um ponto, utiliza-se no caso plano das tensões, as expressões:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} \quad \text{sen } 2\theta$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\text{sen } 2\theta + \tau_{xy} \quad \cos 2\theta$$

Analisando-se os dados do problema e aplicando-se as expressões tem-se:

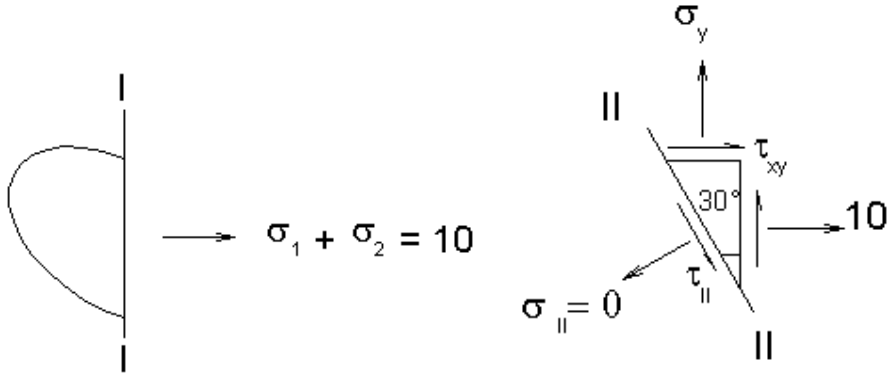

Fig. 36 - Corte II

Do corte II tem-se:

$$\sigma_{II} = 0 = \frac{(10+\sigma_y)}{2} + \frac{(10-\sigma_y)}{2}\cos 60^\circ + \tau_{xy}\,\text{sen } 60^\circ$$

$$0 = \frac{(10+\sigma_y)}{2} + \frac{(10-\sigma_y)}{2}\frac{1}{2} + \tau_{xy}\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

Do corte III tem-se

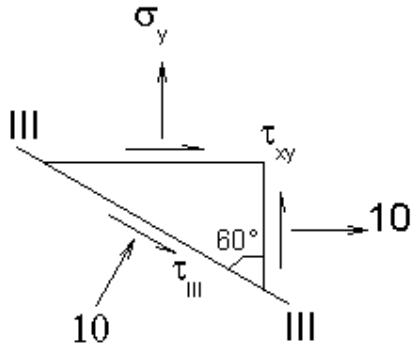

Fig. 37 - Corte III

$$\sigma_{III} = -10 - \frac{(10+\sigma_y)}{2} + \frac{(10-\sigma_y)}{2}\cos 120 + \tau_{xy}\,\text{sen}\,120^\circ$$

$$\sigma_{III} = -10 - \frac{(10+\sigma_y)}{2} + \frac{(10-\sigma_y)}{2}\frac{(-1)}{2} + \tau_{xy}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad _(2)$$

De (1) e (2) tem-se

$$\underline{\overline{\sigma y = -10 \;\; kN/cm^2}} \quad \text{e} \quad \underline{\overline{\tau_{xy} = -10\frac{\sqrt{3}}{3} \;\; \text{kN/cm}^2}}$$

Temos o estado de tensão representado por:

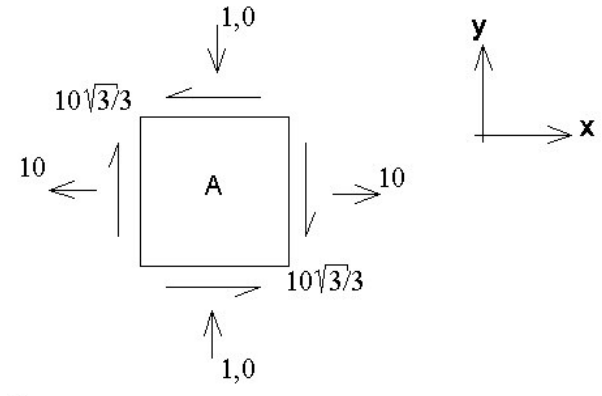

Fig. 38 - Estado de tensão

Aplicando-se a expressão de $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{II}$ tem-se:

$$\bar{\tau}_{II} = -\left(\tfrac{+10+10}{2}\right)\operatorname{sen} 60^\circ - 10\tfrac{\sqrt{3}}{3}\cos 60^\circ \Rightarrow \underline{\overline{\tau_{II} = -11{,}5 \;\; kN/cm^2}}$$

e as direções dos cortes principais:

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \tfrac{2(-10\sqrt{3}/3)}{10+10} = \tfrac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 2\theta_1 = -30^\circ \Rightarrow \underline{\overline{\theta_1 = -15^\circ}}$$

ou:

θ_1' = -105°
θ_1'' = 75°

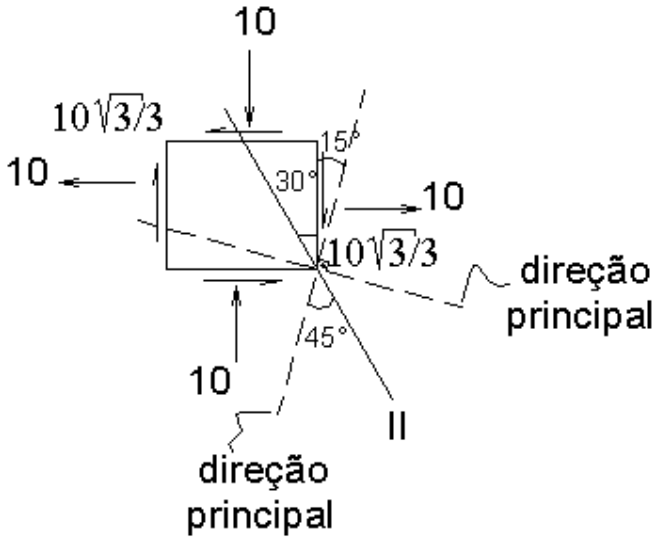

Fig. 39 - Direções principais.

Portanto:

θ_I = D.P = 15° ou $\theta_{II\text{-}OP}$ = 105° ($\theta_{II\text{ - }DP}$ = 45° ou $\theta_{II\text{ - }DP}$ = 75°)

São os ângulos do corte I com as direções principais

Obs. Utilizando o círculo de Mohr

Resolve-se facilmente para qualquer corte na região estudada

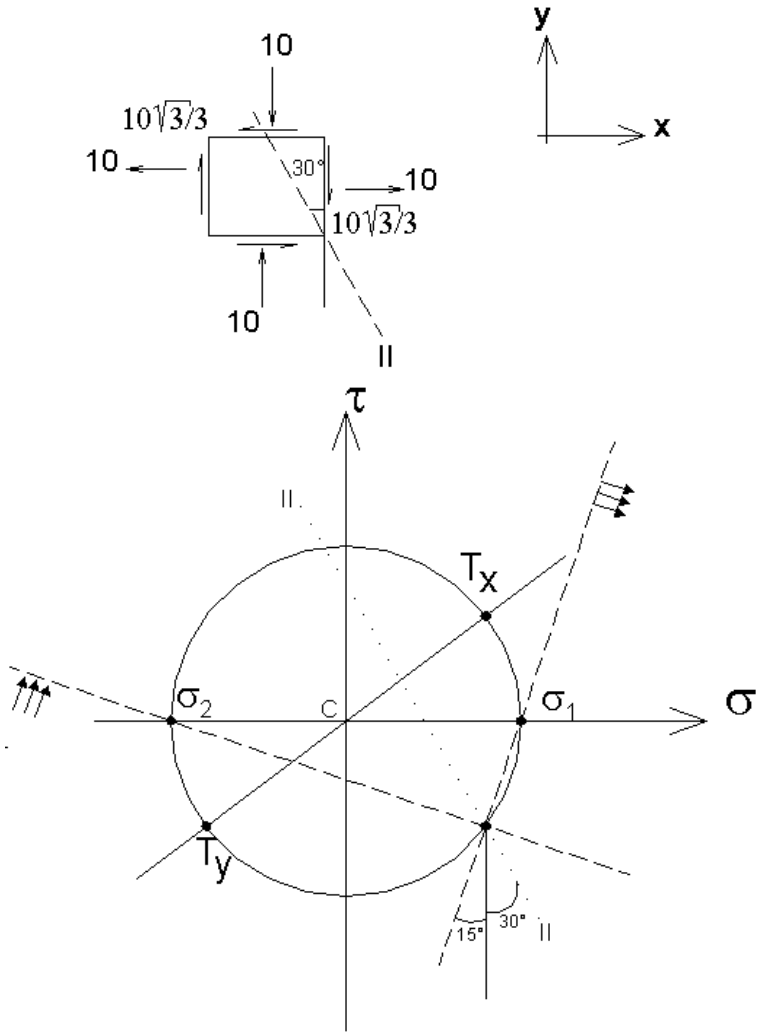

Fig. 40 - Círculo de Mohr

Exercício nº 4

Para a viga da figura, determinar as tensões principais nos pontos 1 e 2 indicando os planos onde elas atuam.

Estes pontos estão na seção transversal do apoio B.

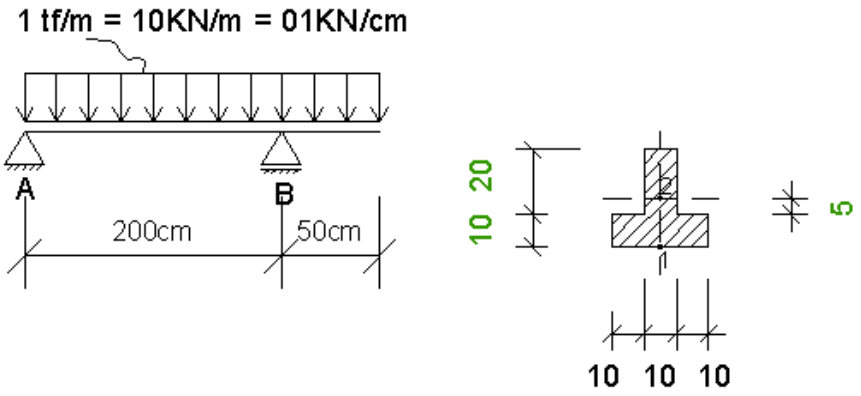

Fig. 41 - Estrutura analisada

Solução: A obtenção das tensões (normal e tangencial) nos pontos 1 e 2 da seção transversal do apoio B, exige a determinação do momento fletor e da força cortante nessa seção obtidos a seguir:

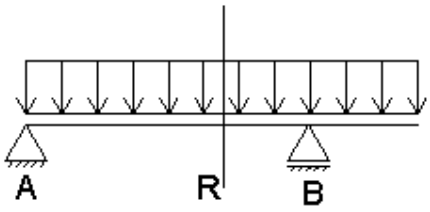

Fig. 42 - Equilíbrio de forças

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \;\; x \;\; 200 - 0{,}1 \;\; x \;\; \frac{250}{2} = 0$$

$$\underline{\overline{R_B = 15{,}625 \;\; kN}}$$

$$\sum Fy = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0{,}1 \;\; x \;\; 250$$

$$R_A = 25 - 15{,}625 \Rightarrow \underline{\overline{R_A = 9{,}375 \;\; kN}}$$

Características geométricas da seção transversal
Momento de Inércia e momento estático

$$I_z = \frac{30x10^3}{12} + 30x10x6^2 + \frac{10x20^2}{12} + 10x20x9^2 = 36.167 \;\; cm^4$$

$S_1 = 0$
$S_2 = |10x15x11{,}5| = 1725 \; cm^3$

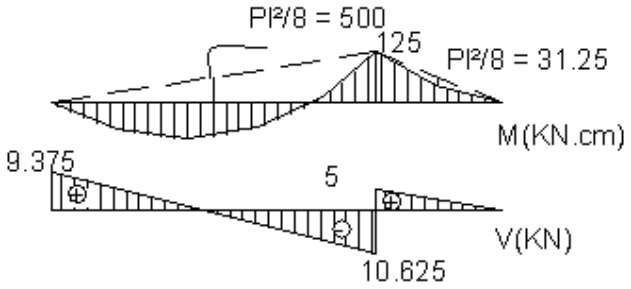

Fig. 43 - Diagramas M e V.

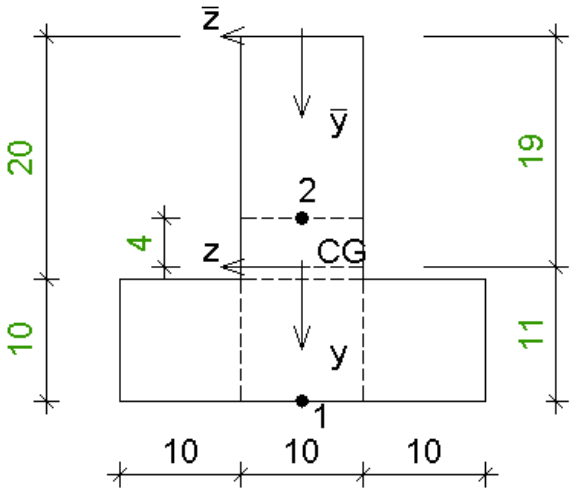

Fig. 44 - Seção transversal.

Cálculo das Tensões

Ponto 1

$$\tau(1) = \frac{V_B.S}{bI_z} = 0$$

$$\sigma(1) = \frac{M_B}{I_z} Y_1 = \frac{125x11}{36167} = 0{,}038 \ \ kN/cm^2$$

A tensão σ(1) será negativo porque o ponto 1 está abaixo da linha neutra, região da seção em que MB causará compressão (ver diagrama de momento fletor)

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = -\frac{0{,}038}{2} \pm \sqrt{(\frac{-0{,}038}{2})^2 + 0^2} = \left.\begin{matrix}\sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -0{,}038 \ \ kN/cm^2\end{matrix}\right\}$$

Estado de Tensão

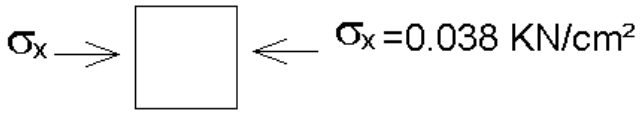

Fig. 45 - Estado de tensão.

Ponto 2

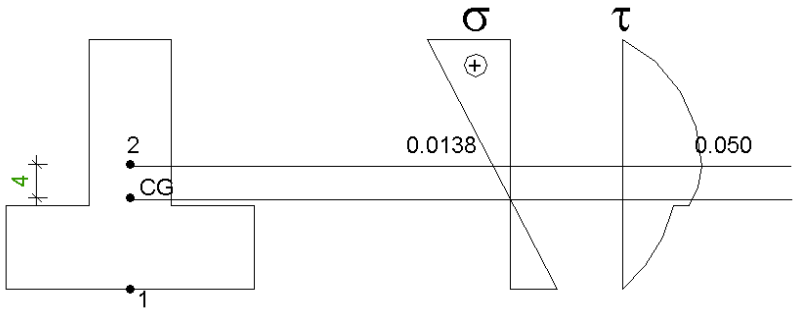

Fig. 46 - Estado de tensão

$$\bar{\tau}(2) = \frac{V_B M_{S2}}{b\ I_z} = \frac{-10.625x1725}{10x36167} = -0{,}050 \quad kN/cm^2$$

$$\bar{\tau}(2) = \frac{Mby_2}{I_z} = \frac{125x4}{36167} = 0{,}0138 \quad kN/cm^2$$

O estado de tensões em torno do ponto 2 pode ser representado por um elemento de área como se mostra na figura e respeitados as convenções de sinais para esforços solicitantes e tensões, resultam os sentidos indicados.

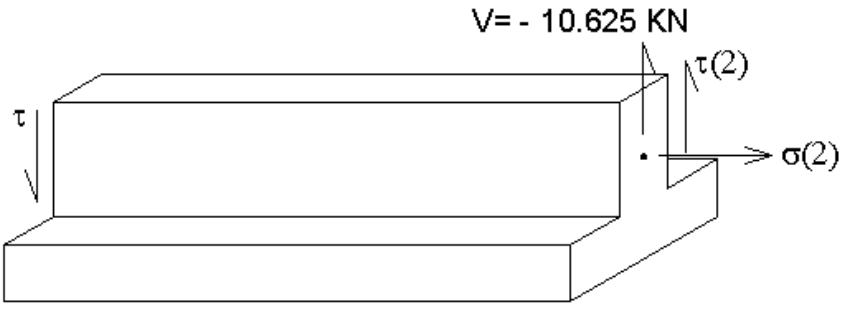

Fig. 47 - Estado de tensão.

Estado de Tensão no ponto 2

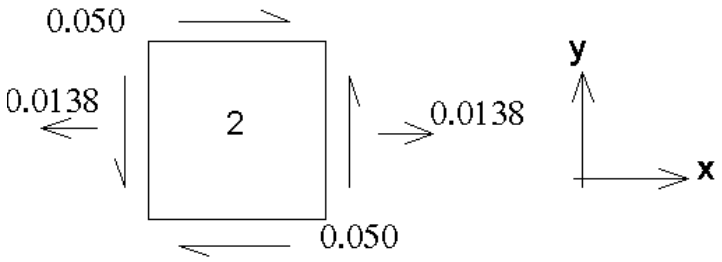

Fig. 48 - Estado de tensão.

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{0,0138}{2} \pm \sqrt{(\frac{0,0138}{2})^2 + (0,050)^2} \quad \begin{matrix}\sigma_1 = 0,057 \ \ kN/cm^2\\ \sigma_2 = -0,0435 \ \ kN/cm^2\end{matrix}$$

Obs.: $\tau_{xy} > 0$ e $V < 0$, isto ocorre devido a convenção de sinais adotado para tensão tangencial e força cortante

Círculo de Mohr

Ponto 1: não é necessário determinar as direções principais, visto que, $\tau(1)$ e $\sigma_y = 0$

Ponto 2:

$$tg\,2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2x0,050}{0,0138} = 7,24$$

$$\underline{\theta_1 \cong 41^\circ,07}$$

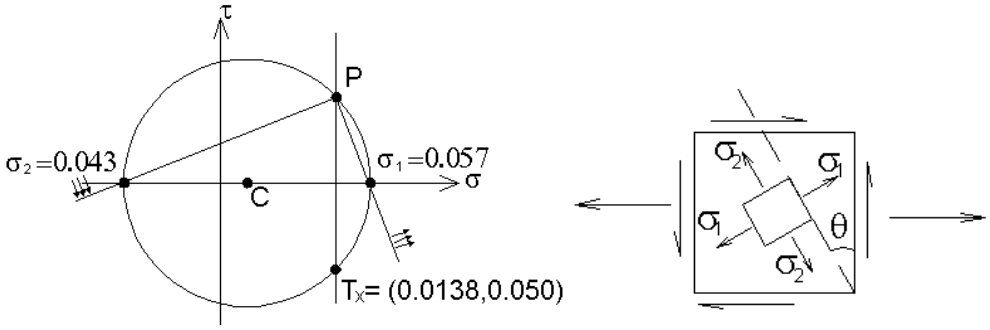

Fig. 49 - Círculo de Mohr

10. Estado triplo ou geral ou triaxial de tensões

Diz-se que um elemento está em estado de tensões triaxial quando se encontra sujeito a tensões σ_x , σ_y , e σ_z.

A figura a seguir mostra um elemento dx, dy, dz retirado de um sólido solicitado a este estado de tensão.

Fazendo abstração das forças volumétricas e das diferenciais de tensão, o equilíbrio permite concluir que os respectivos vetores de tensão, em cada uma das seis faces do elemento, serão iguais em valor e de sentido oposto. (Equilíbrio de forças).

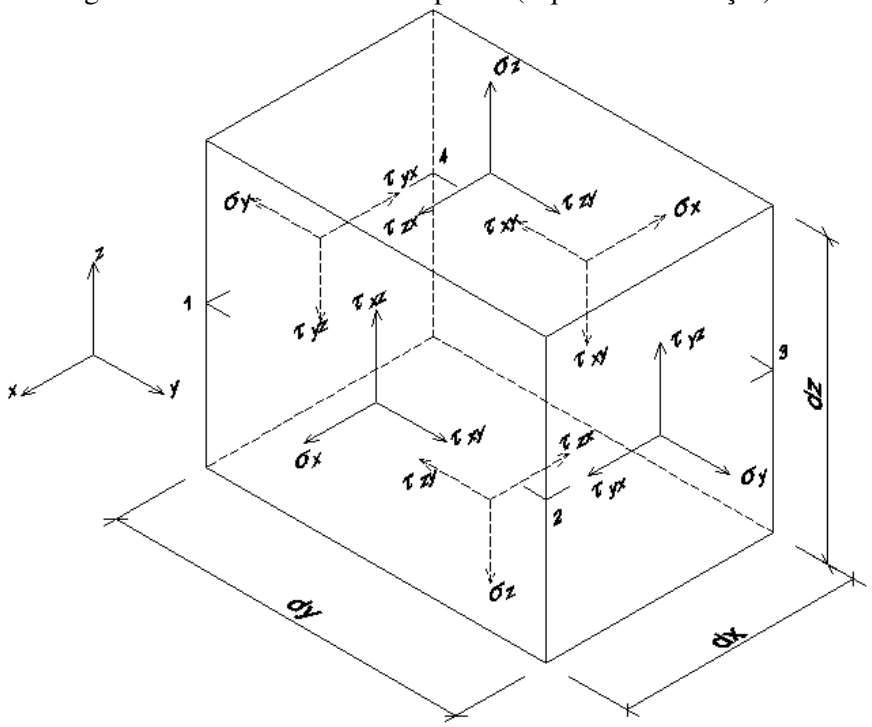

Fig. 50 Estado triplo de tensões.

A notação usada é a mesma do caso plano de tensões.

O equilíbrio do elemento é expresso por 6 equações

Já utilizamos 3 condições ao adotarmos valores iguais em faces opostas. Ainda restam as três condições de nulidade de momentos aplicados ao elemento. Assim:

$$\tau_{xy}\,dy\;\;dz\;\;dx = \tau_{yx}\,dx\;\;dz\;\;dy$$

e analogamente para τ_{xy} , τ_{zx} e τ_{yz} , τ_{zy} tem-se que:

$$\begin{cases} \tau_{yx} = \tau_{xy} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \Rightarrow \text{TEOREMA DE CAUCHY} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{cases}$$

Este teorema de igualdade recíproca das tensões tangenciais, ou Teorema de Cauchy reduz o nº de parâmetro que determinam o estado triplo de tensão a 6:

σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz}

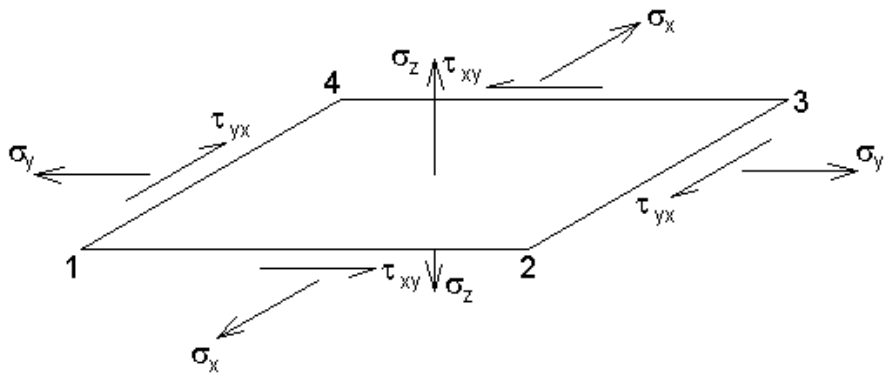

Fig. 51 - Equilíbrio de tensões

A prova da suficiência destes seis parâmetros será vista a seguir.

Direções Principais

Sendo conhecidos os seis componentes de tensão de um elemento orientado segundo os eixos x,y e z procuramos o vetor de tensão numa face oblíqua. Para isto, estudaremos o equilíbrio do elemento tetraédico da figura. A direção da face obliqua é dada mediante um vetor unitário $\vec{C}(Cx, Cy, Cz)$ com direção normal ao plano; os cosenos diretores do plano seguem a:

$$Cx^2 + Cy^2 + Cz^2 = 1$$

chamando-se de dA a área da face obliqua do elemento, as outras faces terão áreas CxdA, CydA e CzdA. No tetraedo vemos estas representações bem como das tensões.

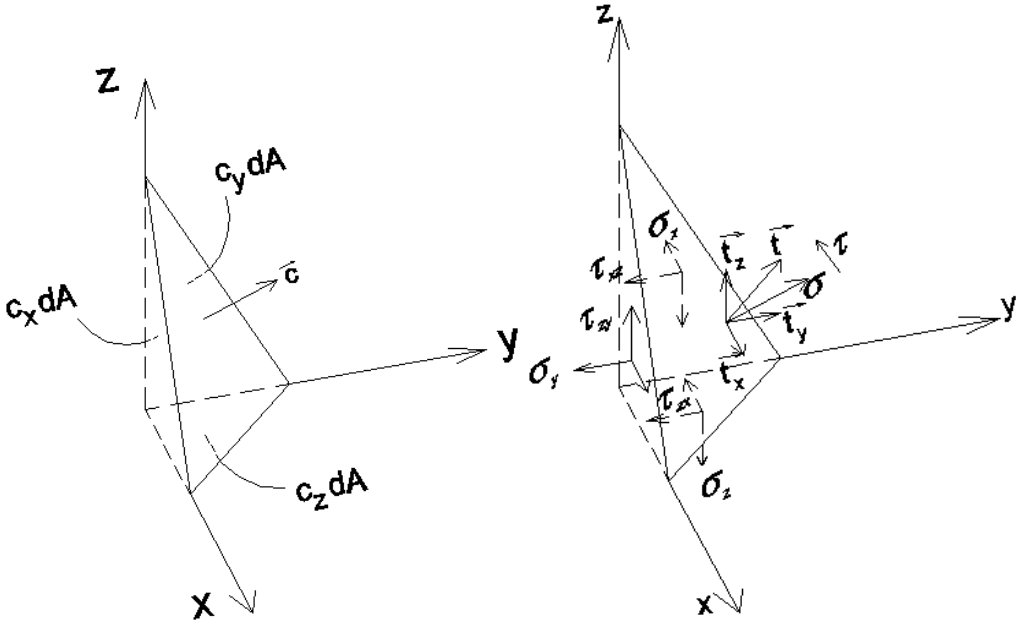

Fig. 52 - Tensões no tetraedro

Assim tem-se:

* $\vec{t}$ = tensão total no plano oblíquo

$\vec{t}\,(\vec{t}\,x, \vec{t}\,y, \vec{t}\,z)$ e $tx^2 + ty^2 + tz^2$

* No plano obliquo: $t^2 = \sigma^2 + \tau^2$

Vamos agora determinar os componentes tx,ty e tz fazendo-se o equilíbrio de forças no elemento:

* Equilíbrio em $x \Rightarrow txdA = \sigma_x CxdA + \tau_{yx} CydA + \tau_{zx} CzdA$

$$tx = \sigma_x C_x + \tau_{yx} Cy + \tau_{zx} Cz$$

* Analogamente para y e z:

$$y \Rightarrow ty = \tau_{xy} Cx + \sigma_y Cy + \tau_{zy} Cz$$

$$z \Rightarrow tz = \tau_{xz} Cx + \tau_{yz} Cy + \sigma_z Cz$$

O fato do vetor $\vec{t}$ possa ser calculado por tx, ty e tz mostra a suficiência dos parâmetros $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ para representação do estado triplo de tensão.

Procuraremos agora um plano onde não há tensões de cisalhamento. A tensão normal referente a direção principal será chamada de σ, ou seja σ1, σ2 e σ3 no estado triplo. O vetor tensão principal terá o valor σ e a sua direção coincidirá com a do vetor $\vec{C}$ (normal ou plano) e suas componentes serão Cxσ, Cyσ e Czσ. Assim:

$$\begin{cases} tx = \sigma Cx \\ ty = \sigma Cy \\ tz = \sigma Cz \end{cases}$$

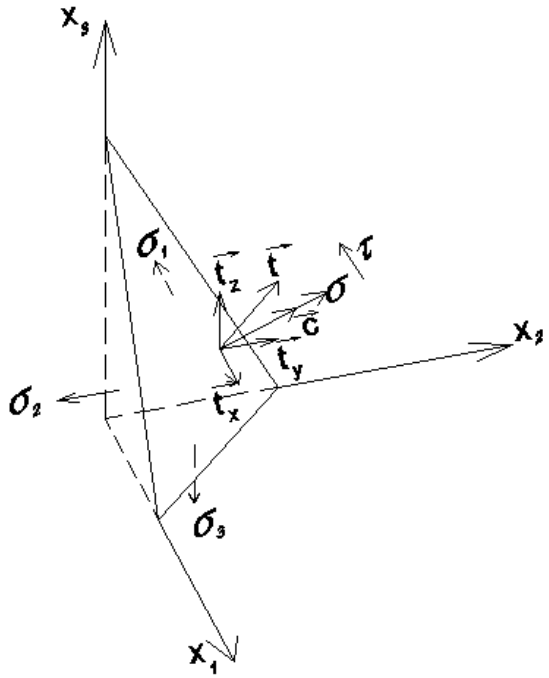

Fig. 53 - Tensão principal

fazendo-se: $\begin{cases} t_x = C_x\sigma_x + C_y\tau_{yx} + C_z\tau_{zx} \\ t_y = C_x\tau_{xy} + C_y\sigma_y + C_z\tau_{zy} \\ t_z = C_x\tau_{xz} + C_y\tau_{yz} + C_z\sigma_z \end{cases}$

igual ao valor anterior tem-se: $\begin{cases} \sigma C_x = C_x\sigma_x + C_y\tau_{yx} + C_z\tau_{zx} \\ \sigma C_y = C_x\tau_{xy} + C_y\sigma_y + C_z\tau_{zy} \\ \sigma C_z = C_x\tau_{xz} + C_y\tau_{yz} + C_z\sigma_z \end{cases}$ (*)

ou:

$$\begin{cases} C_x(\sigma_x - \sigma) + C_y\tau_{yx} + \tau_{zx}C_z = 0 \\ C_x\tau_{xy} + (\sigma_y - \sigma)C_y + \tau_{zy}C_z = 0 \\ C_x\tau_{xz} + \tau_{yz}C_y + (\sigma_z - \sigma)C_z = 0 \end{cases}$$

três homogêneas em equações. Portanto: (Cx, Cy, Cz)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \sigma_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

A resolução dá uma equação do 3º grau em σ do tipo:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

com: σ1 > σ2 > σ3 ; σ1, σ2, σ3 raízes. São os autovalores que associados com versores resultam em atuto-vetores, indicando o módulo e o sentido das tensões principais (Planos principais). Os termos I_1 , I_2 , I_3 são chamados de invariantes de tensão e valem:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau^2{}_{xy} - \tau^2{}_{xz} - \tau^2{}_{yz}$$

$$I_3 = \det\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Representação gráfica - Círculo de Mohr

Uma vez provada a existência de σ1, σ2 e σ3, não se procurará determiná-las a partir das 6 componentes de tensão. Esta procura é complicada e de pouco interesse prático. Admitir-se-á dado um estado de tensão mediante suas tensões principais e procurar-se-á a representação gráfica do vetor $\vec{t}(\sigma,\tau)$ encontrado num plano de direção genérica. Supor-se-á: $\boxed{\sigma 1 \geq \sigma 2 \geq \sigma 2}$.

σ, como já visto, é a componente de $\vec{t}$ perpendicular ao plano de atuação e τ a componente tangencial no referido plano, por exemplo, no plano yz:

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

Nas direções principais colocamos os eixos coordenados X_1 , X_2 , X_3 com origem no ponto no qual se estudam as tensões. A direção do plano genérico será determinada mediante o vetor unitário $\vec{C}(C_1, C_2, C_3)$ com direção perpendicular ao plano.

Os ângulos diretores serão C_1, C_2 , C_3 , sendo $C_1 = \cos\alpha_1$ $C_2 = \cos\alpha_2$ e $C_3 = \cos\alpha_3$, com

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = 1$$

Para obter as componentes do vetos de tensão basta substituir em (*), $\sigma_x = \sigma_1$; $\sigma_y = \sigma_2$; $\sigma_z = \sigma_3$ e suprimir as parcelas que contém tensões de cisalhamento, nulas nos planos coordenados dos eixos X_1 , X_2 , X_3 :

$$t_1 = C_1\ \sigma_1$$

$$t_2 = C_2 \ \sigma_2$$

$$t_3 = C_3 \ \sigma_3$$

A tensão normal pode ser obtida proptando os componentes t_1 , t_2 , e t_3 na direção de $\vec{C}$ obtendo: $(\tau = \vec{t} \,.\, \vec{C})$

$$\sigma = \sigma_1 \ c_1^2 + \sigma_2 \ c_2^2 + \sigma_3 \ c_3^2$$

O módulo de $\vec{t}$ é dado por:

$$\left|\vec{t}\right| = \vec{t} \,.\, \vec{t} = t^2 = \sigma^2 + \tau^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

ou:

$$t^2 = \sigma_1^2 C_1^2 + \sigma_2^2 C_2^2 + \sigma_3^2 C_3^2$$

Desenvolvendo o sistema formado pelas expressões incógnitas C_1^2, C_2^2, C_3^2 resulta:

$$C_1^2 = \frac{t^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$C_2^2 = \frac{t^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$C_3^2 = \frac{t^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

sendo:

$$\boxed{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}$$

Como C_1^2 é positivo e o denominador da 1ª equação também o é, resulta em:

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0$$

que pode ser escrita como:

$$\tau^2 + (\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 \geq 0$$

Esta expressão, é a equação resultante de um círculo de raio $\frac{(\sigma 2 - \sigma 3)}{2}$ no plano (σ, τ).

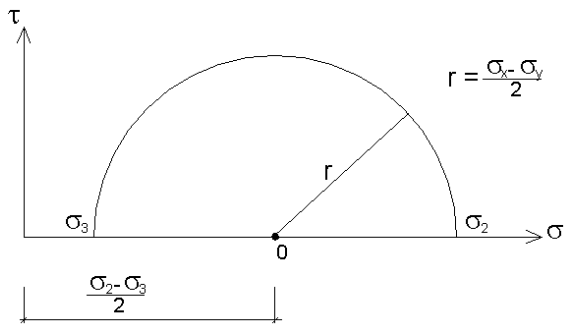

Fig. 54 - Círculo de Mohr

Portanto, a desigualdade implica que os pontos (σ, τ) estão situados fora desse círculo.

Como C_2^2 é positivo e o denominador da segunda equação é negativo, o numerador também deverá ser negativo, assim:

$$\tau^2 + (\sigma - \frac{\sigma 1+\sigma 3}{2})^2 \leq \frac{(\sigma 1+\sigma 3)^2}{2}$$

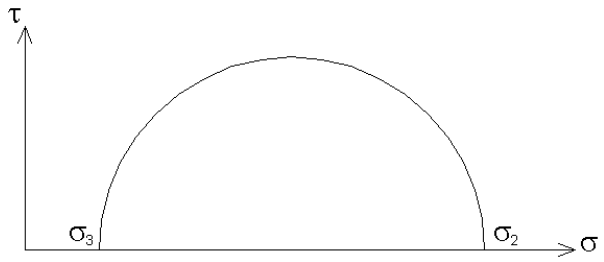

Fig. 55 - Círculo de Mohr

levando a pontos (σ, τ) dentro do círculo.

Analogamente para a 3ª equação ter-se-á:

$$\tau^2 + (\sigma - \frac{\sigma 1+\sigma 2}{2})^2 \geq \frac{(\sigma 1-\sigma 2)^2}{2}$$

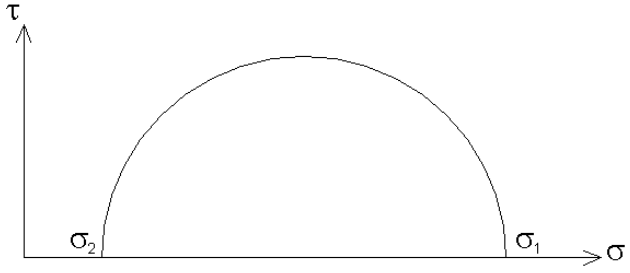

Fig. 56 - Círculo de Mohr

resultando pontos (σ, τ) fora do círculo.

Fazendo-se a superposição pode-se afirmar que os pontos T(σ, τ) possíveis, referentes a todos os planos genéricos estão situados na região hachurada da figura abaixo:

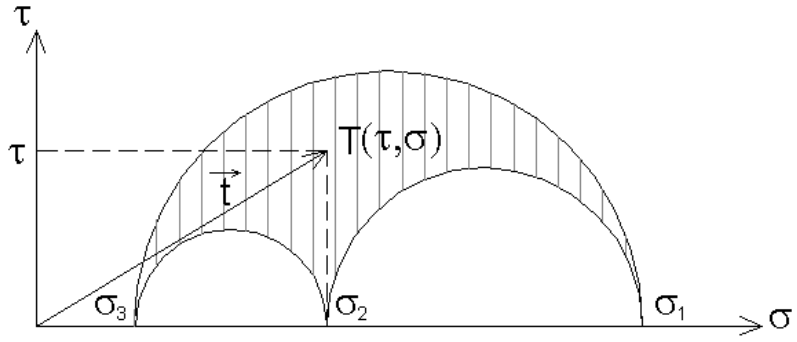

Fig. 57 - Círculo de Mohr

Pode-se obter o ponto T graficamente utilizando os ângulos diretores α1 e α3.

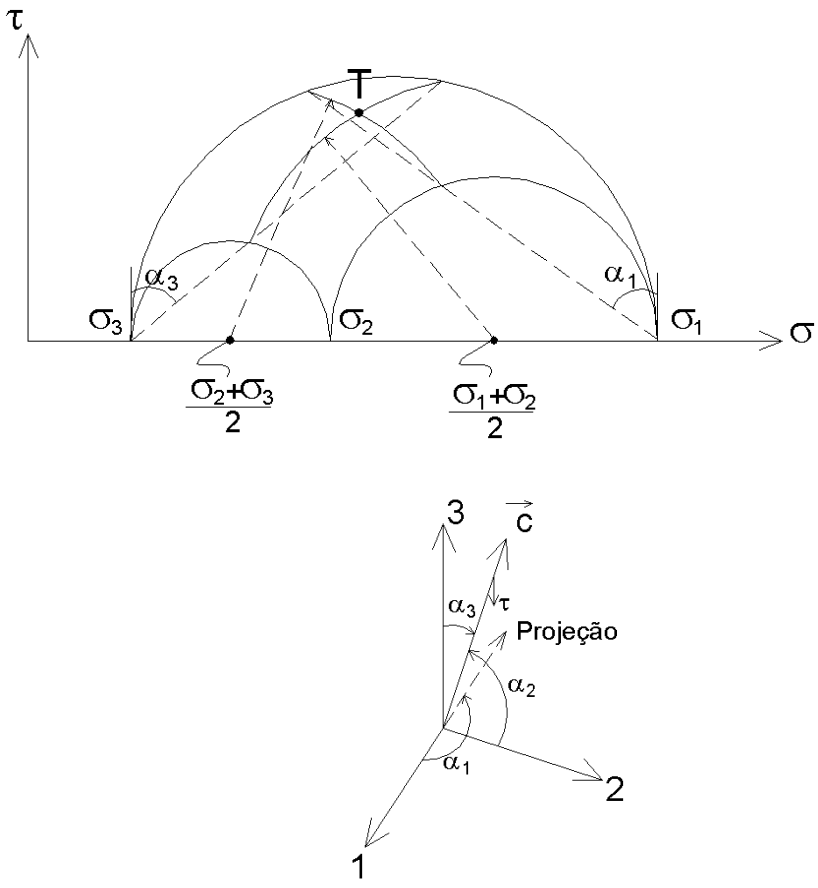

Fig. 58 - Círculo de Mohr. Construção

Apresenta-se a seguir alguns casos particulares de estado triplo:

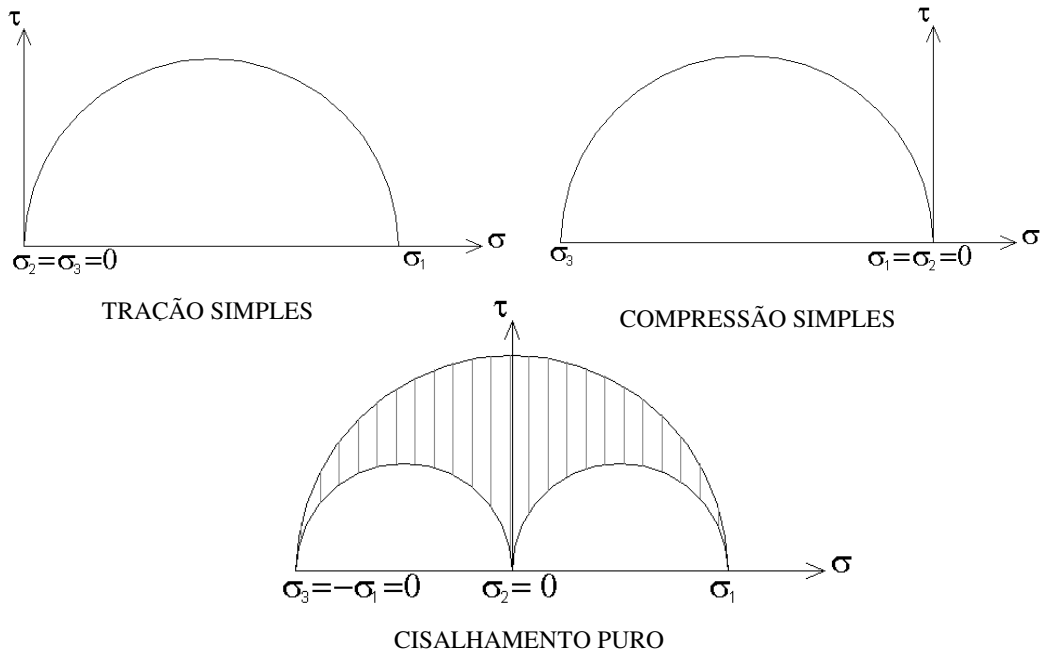

Fig. 59 - Círculo de Mohr. Casos particulares.

Observações no caso geral da solicitação por tensões:

a) Seria sempre necessário considerar (a não ser em casos particulares freqüentes) os três círculos, pois o estudo da variação de tensões em um dos três planos pode não exibir as tensões extremas.
b) A maioria dos casos de estruturas correntes estarão considerados em normas técnicas, com indicações razoáveis sobre os procedimentos a adotar.

Conforme foi mencionado em a) há casos particulares freqüentes em que basta o estudo de tensões em um dos planos principais.

É o caso das vigas (não vigas parede!). Nelas a solicitação típica será do tipo:

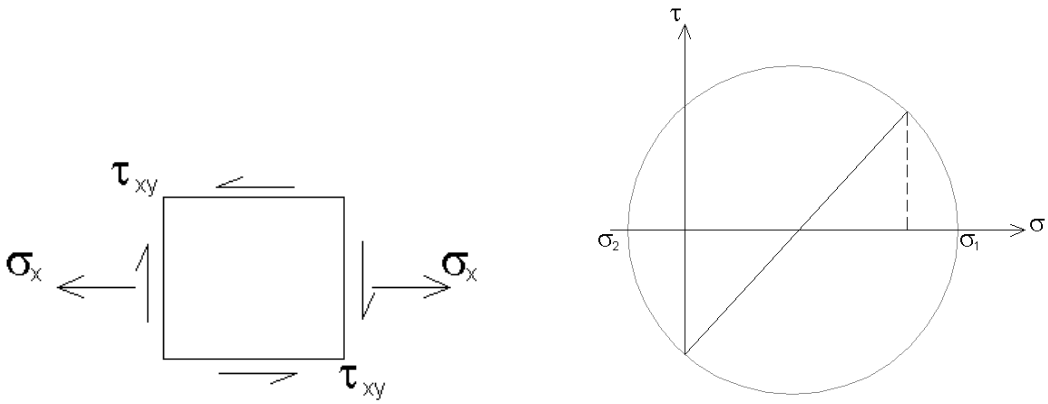

Fig. 60 - Tensões em vigas

É fácil de ver que mesmo se nos preocupássemos com o estado triplo o outro valor de tensão principal σ_3 (abandonando a convenção $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) seria nulo e os dois círculos restantes seriam internos.

Então, em casos como este, o estudo das tensões do plano de σ_1 , σ_2 já fornece tensões extremas (em módulo), tanto σ quanto τ.

Para certas finalidades, como no caso do dimensionamento ou verificações, usando CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA, esse fato também será levado em conta, embora pudesse passar desapercebido.

O exercício seguinte pretende mostrar os detalhes de como seria a procura de σ_1 , σ_2 , σ_3 , a partir do conhecimento de σ_x , σ_y , assim como mostrar outra maneira de rever o que foi feito no chamado "estado duplo" ou "plano de tensões".

11. Exercício nº 5.

Seja um prisma de dimensões a, a e 2a. Solicitando-se este prisma por sapatas conforme a figura (desprezando-se o atrito), determinar a máxima tensão de cisalhamento atuante.

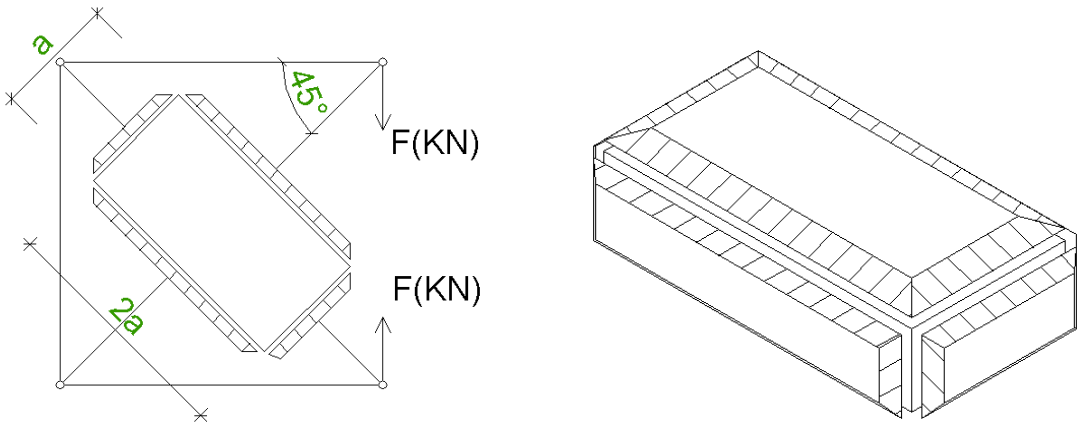

Fig. 61 - Forças no elemento

Solução: a) Esforços no prisma

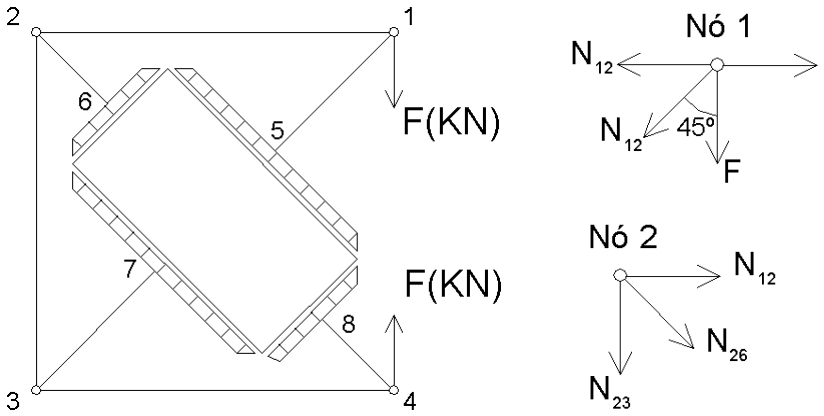

Fig. 62 - Equilíbrio de forças

Nó 1:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{12} = -N_{15}\cos 45^\circ$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{15} = -F/\cos 45^\circ$$

$$N_{12} = F$$

$$N_{15} = -F\sqrt{2}$$

Nó 2:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{26} = -\frac{N_{12}}{\cos 45^\circ} = -F\sqrt{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{23} = N_{26}\cos 45^\circ = F$$

Por simetria :

$$N_{37} = N_{15} = -F\sqrt{2}$$
$$N_{34} = N_{12} = F$$
$$N_{48} = N_{26} = -F\sqrt{2}$$

Esquematicamente:

Figura 63 – Forças em equilíbrio

Este elemento fica sujeito a um estado triplo de tensões. Seria errado supor um estado plano do tipo:

$$\sigma_1 = \frac{F\sqrt{2}}{20^2} \geq \sigma_2 = \frac{F\sqrt{2}}{a^2}$$

(ESTADO TRIPLO $\Rightarrow$ EST. DUPLO)

No círculo de Mohr seria:

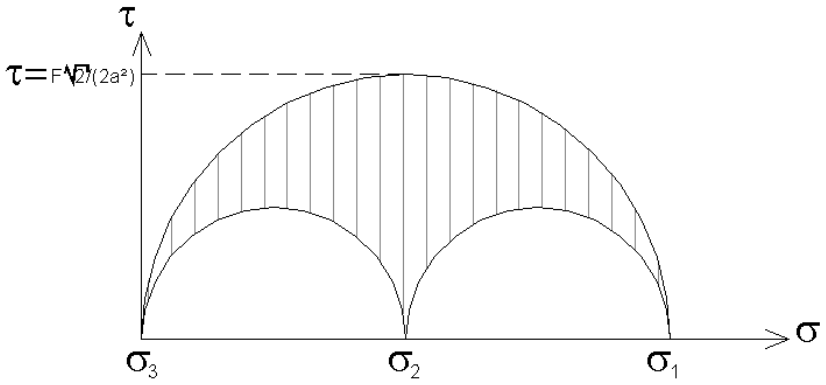

Fig. 64 - Círculo de Mohr

Exercício nº 6

Determinar as direções e as tensões principais no ponto P submetido a:

$\sigma_x = 10 \ \ MPa$ $\qquad$ $\tau_{xy} = 10 \ \ MPa$

$\sigma_y = 20 \ \ MPa$ $\qquad$ $\tau_{yz} = 0$

$\sigma_z = 0$ $\qquad$ $\tau_{zx} = 0$

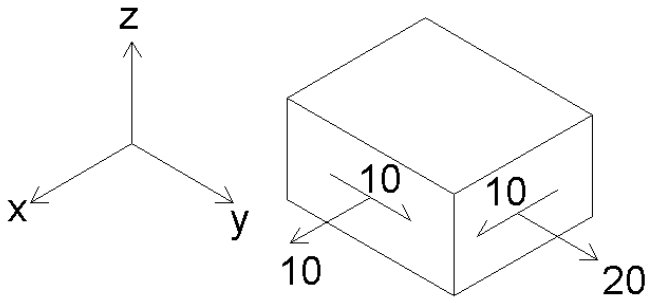

Fig. 65 - Tensões no ponto

a) Determinação das tensões principais

Vê-se que neste caso, z é uma das direções principais

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(A)}$$

$$-\sigma \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \therefore 1^a \text{ raiz } \sigma = \sigma_3 = 0$$

Cálculo das 2 raízes:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0$$

$$\sigma_x^2 - \sigma_y(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x\sigma_y - \tau^2_{xy} = 0$$

$$\sigma_2^1 = \frac{\sigma x + \sigma y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma x - \sigma y}{2})^2 + \tau^2_{xy}}$$

Numericamente:

$$\sigma_1 = 15 + \sqrt{25 + 100} = 15 + 11{,}18 = 26{,}18 \quad MPa$$

$$\sigma_2 = 15 - \sqrt{25 + 100} = 15 - 11{,}18 = 3{,}82 \quad MPa$$

$$\sigma_3 = 0$$

b) Cálculo das direções principais

b1) Com $\sigma = \sigma_3 = 0$ em (A):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(B)}$$

e observando que:

I) $$\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

então existe solução não trivial.

II) Na realidade (B) é formado por 2 sistemas homogêneos:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(B1)}$$

e:

$$-\sigma C_z = 0 \qquad \text{(B2)}$$

mas (B2) se resume em 0 = 0 ($\sigma = \sigma_3 = 0$) e não serve para determinar cz.

Substituindo em (B1) os valores numéricos:

portanto, Cx = Cy = 0 ou $\alpha x = \pm 90^\circ$ e $\alpha y = \pm 90^\circ$

isto, com a informação $Cx^2 + Cy^2 + Cz^2 = 1$, fornece $Cz = \pm \alpha z = 0$ ou $\alpha z = \pm 180^\circ$

Então, como esperado, a direção z associada a $\sigma = 0$ é a do eixo z.

b2) com $\sigma = \sigma_1 = 26{,}18$ Mpa em (B)

$$\begin{bmatrix} -16{,}18 & 10 & 0 \\ 10 & -6{,}18 & 0 \\ 0 & 0 & -26{,}18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} = 0$$ Desenvolvendo: 99,99 - 100 ≈ 0

$\Delta = 0 \therefore$ há solução na trivial.

Desmembrando o sistema acima em 2 independentes:

$$\begin{bmatrix} -16{,}18 & 10 \\ 10 & -6{,}18 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(B3)}$$

e -26,18 cz = 0 $\therefore$ cz = 0 ou $\alpha z = \pm 90^\circ \therefore$ a normal ao plano onde atua $\sigma 1$ está no plano (xy).

Em (B3) $\Delta = 0$, mas obedecendo $cx^2 + cy^2 + cz^2 = 1$ (B4)
Vem com (B4) e (B3):

De (B4): $Cy = \pm\sqrt{1 - Cx^2}$

na 1ª de (B3). $-16{,}18Cx + 10\ Cy = 0 \Rightarrow -16{,}18\ Cx \pm 10\sqrt{1 - C^2x} = 0$

$$16{,}18\ Cx = \pm 10\sqrt{1 - Cx^2}$$

$$261{,}79\ Cx^2 = \pm 100(1 - Cx^2)$$

$$Cx = \pm\sqrt{\frac{100}{361{,}79}} = \pm\ 0{,}526 \begin{cases} \alpha x = \pm\ 58{,}26^\circ \\ \alpha x = \pm 121{,}74^\circ \end{cases}$$

Para decidir sobre sinais verifique-se que em (B3) só servem valores de Cx e Cy de mesmo sinal.

Basta conhecer aquele de αx para definir a direção associada a (já que, com o resultado anterior, σ1 e σ2 estarão no plano xy)

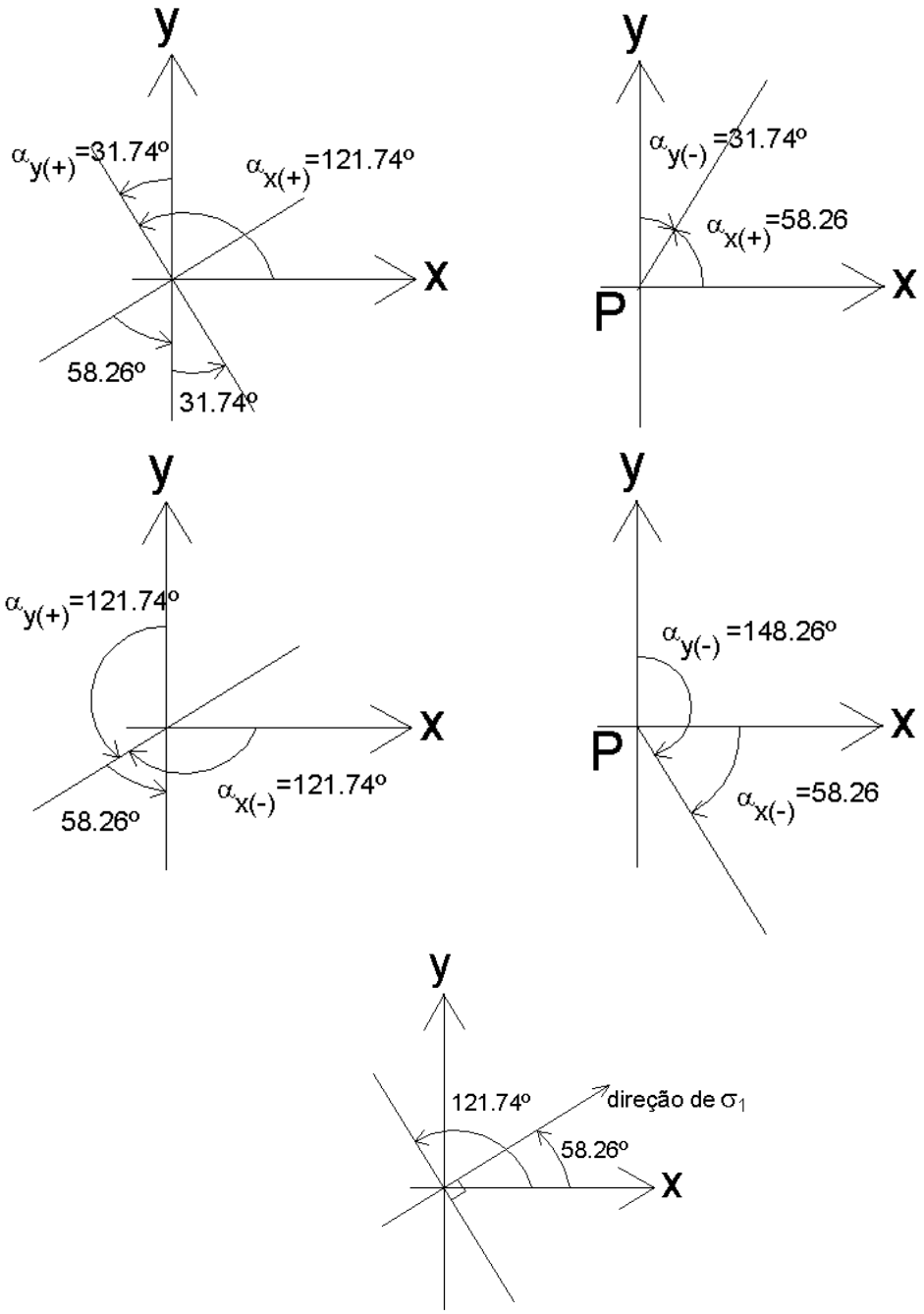

Fig. 66 - Ângulos α_1.

A direção de σ_2, neste caso particular, não precisa ser determinada com a consideração de σ = σ2 = 3,82 em (B) pois, já se sabe que σ_2 atua no plano xy e sua direção é perpendicular à de σ_1

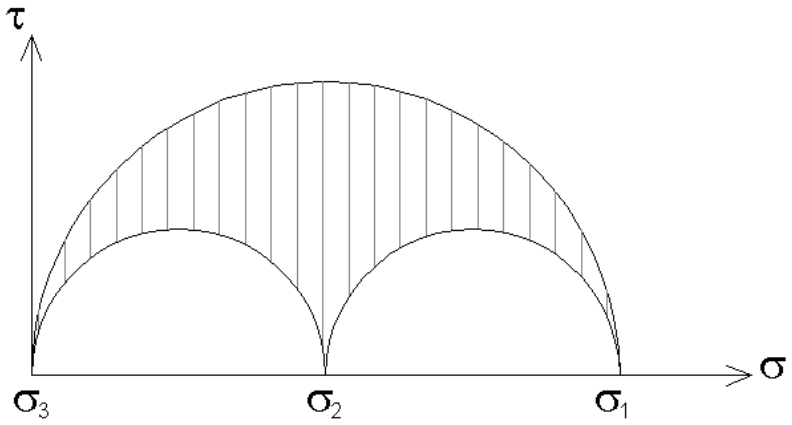

Fig. 67 - Círculo de Mohr

Confirmando com cálculo prático e mais usual no que se refere à varação das tensões no plano xy.

$$tg\,2\theta = \frac{2x10}{-10} = -2 \therefore \theta = -31{,}72$$

Este é o ângulo entre a direção de uma das tensões principais e a direção do plano de σx (ou a direção do eixo y). Com:

$$\sigma = \sigma x \;\; \cos^2\theta - 2\tau xy \;\; \text{sen}\,\theta \;\; \cos\theta + \text{sen}^2\,\theta$$

Temos:

$$\sigma = 10 \;\; \cos^2(-31{,}72) \;\; - 2x10 \;\; \text{sen}(-31{,}72) + 20 \;\; \text{sen}^2(-31{,}72) = \sigma = \sigma 2 = 3{,}82 \;\; MPa$$

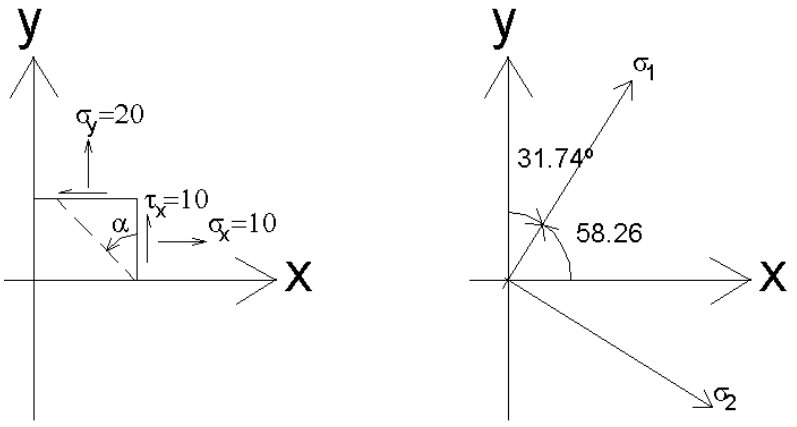

Fig. 68 - Tensões principais

12. Aplicação do Estudo de Tensões em Vigas

Examinaremos elementos de uma seção transversal de uma viga sob flexão estática.

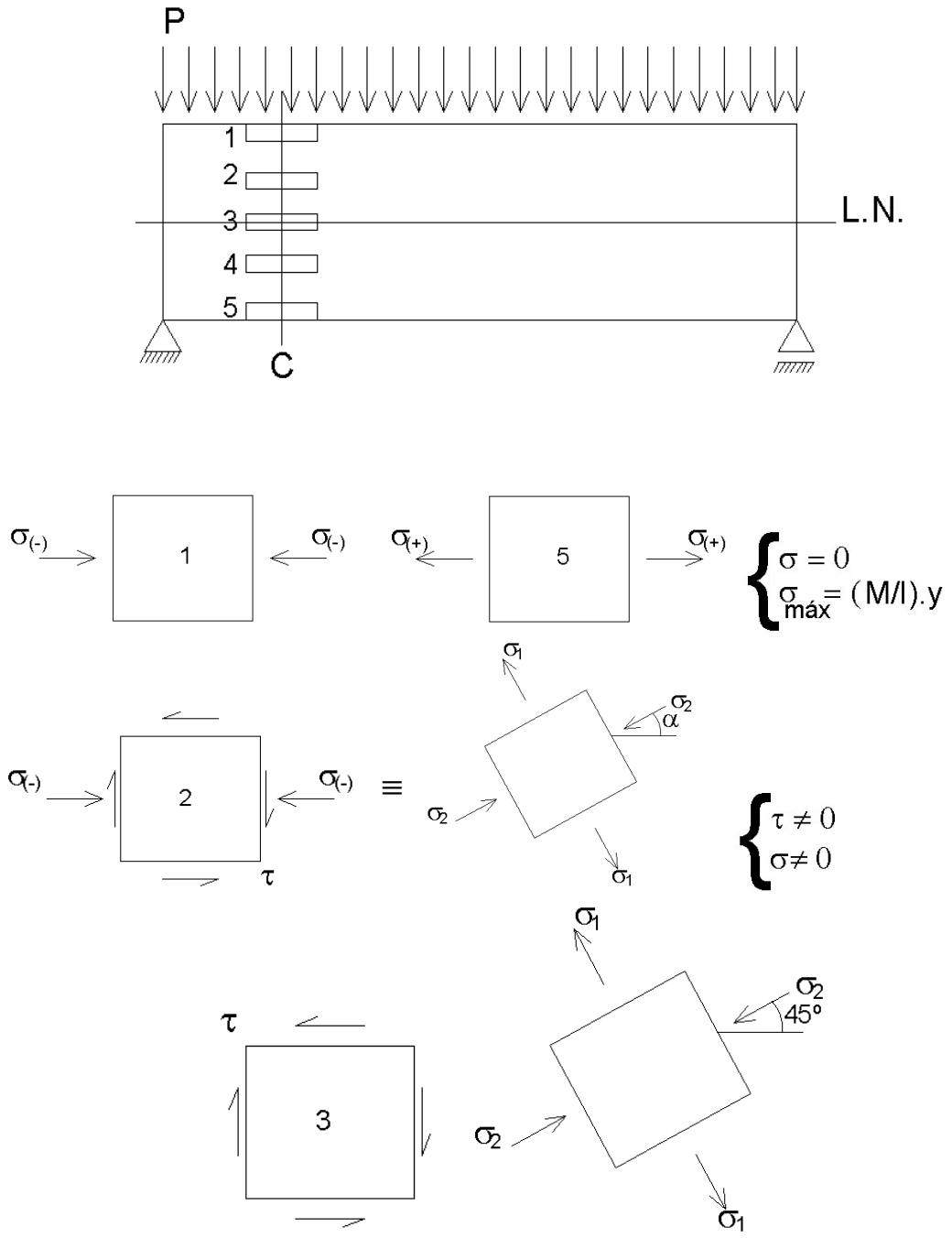

Fig. 69 - Tensões na viga

Observação:

Na parte superior tem-se o elemento 1 com apenas σ_x atuante. Os elementos 2 e 4 acham-se sob σ e τ. No elemento 3 na LN age apenas τ, valendo τ_{max}

Ao acharmos as tensões principais, para cada estado plano de tensão interiores da peça, teremos tensões de compressão e de tração este estudo torna-se importante em certos

materiais frágeis à tração, como o concreto, podendo ocorrer fissuras a 45º. Neste caso são colocadas barras de aço inclinadas a 45º.

Para elucidar mais o assunto, pode-se representar a variação das direções das tensões principais, na viga, por exemplo, sujeita a uma carga distribuída. As linhas cheias da figura são direções de tração e as pontilhadas, as compressão. Estas linhas são chamadas de ISOSTÁTICAS ou CURVAS DE TRAJETÓRIA DE TENSÕES.

Estas curvas representam as direções de tensões em cada ponto da viga, ou seja, um conjunto de curvas que indicam as tangentes em cada ponto e sua mudança de direção.

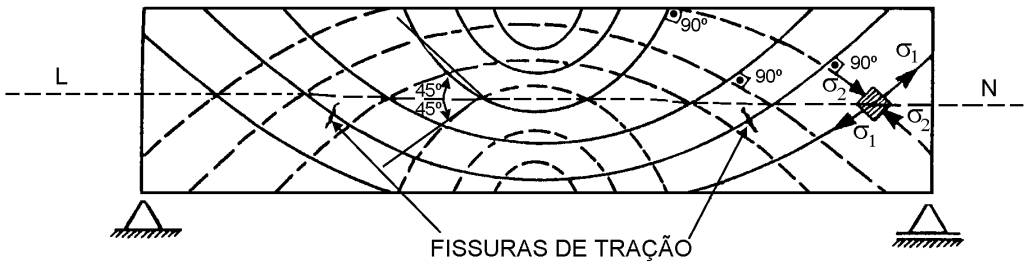

Fig. 70 - Curvas Isostáticas

Nota-se as tensões principais em direções perpendiculares (90º). Na linha neutra $\sigma = 0$ e as linhas que cortam a LN estão a 45º da horizontal, representam τ_{max} ou "cisalhamento puro".

Outra observação importante para tensões em viga e que a tensão σy vale aproximadamente zero. Se utilizarmos a teoria da Elasticidade, chegaríamos a seguinte $\sigma y = \left(\frac{-y^3}{3} + c^2 y + \frac{2c^3}{3} \right)$, sendo $c = \frac{h}{2}$, que podemos considerá-lo $\sigma y \cong 0$ para vigas

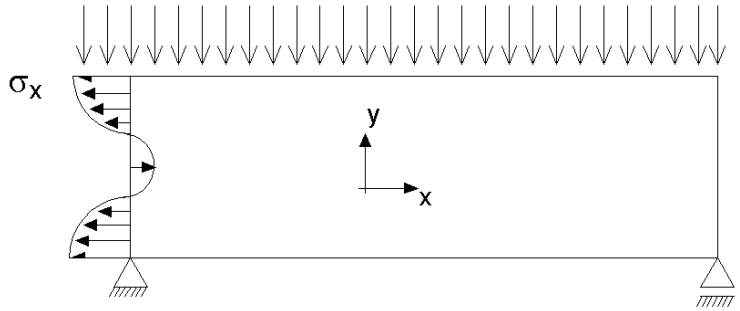

Fig. 71 - Tensão σ_y.

13 - Bibliografia

FEODOSIEV, V.I. Resistencia de Materiales. Moscou: Editora Mir, 1980, 583p.

POPOV, E.G. Introdução à Mecânica dos Sólidos. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1978. 534p.

SCHIEL, F. Introdução à Resistência dos Materiais. São Paulo: Harpet & Row do Brasil, 1984. 395p.